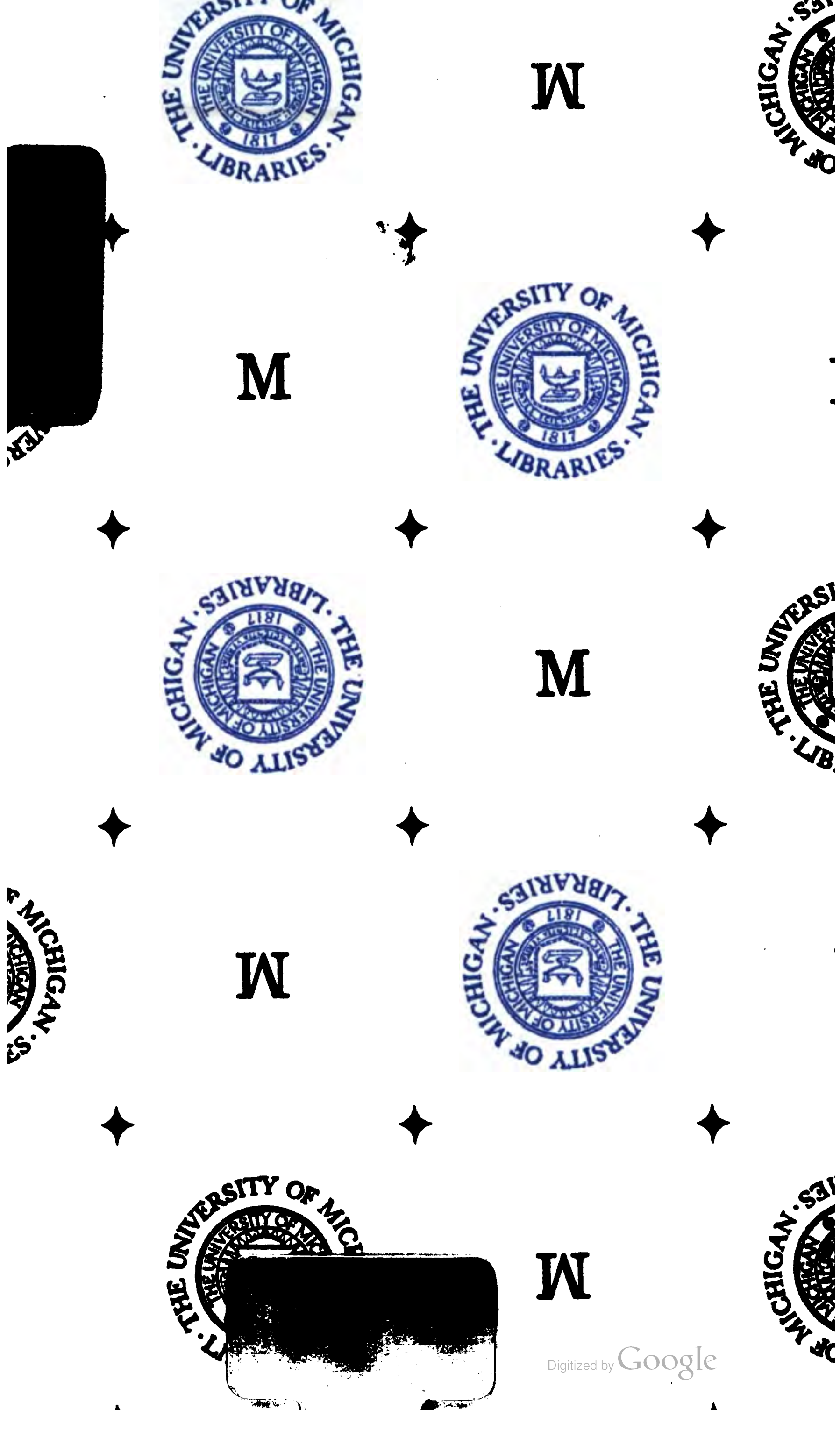
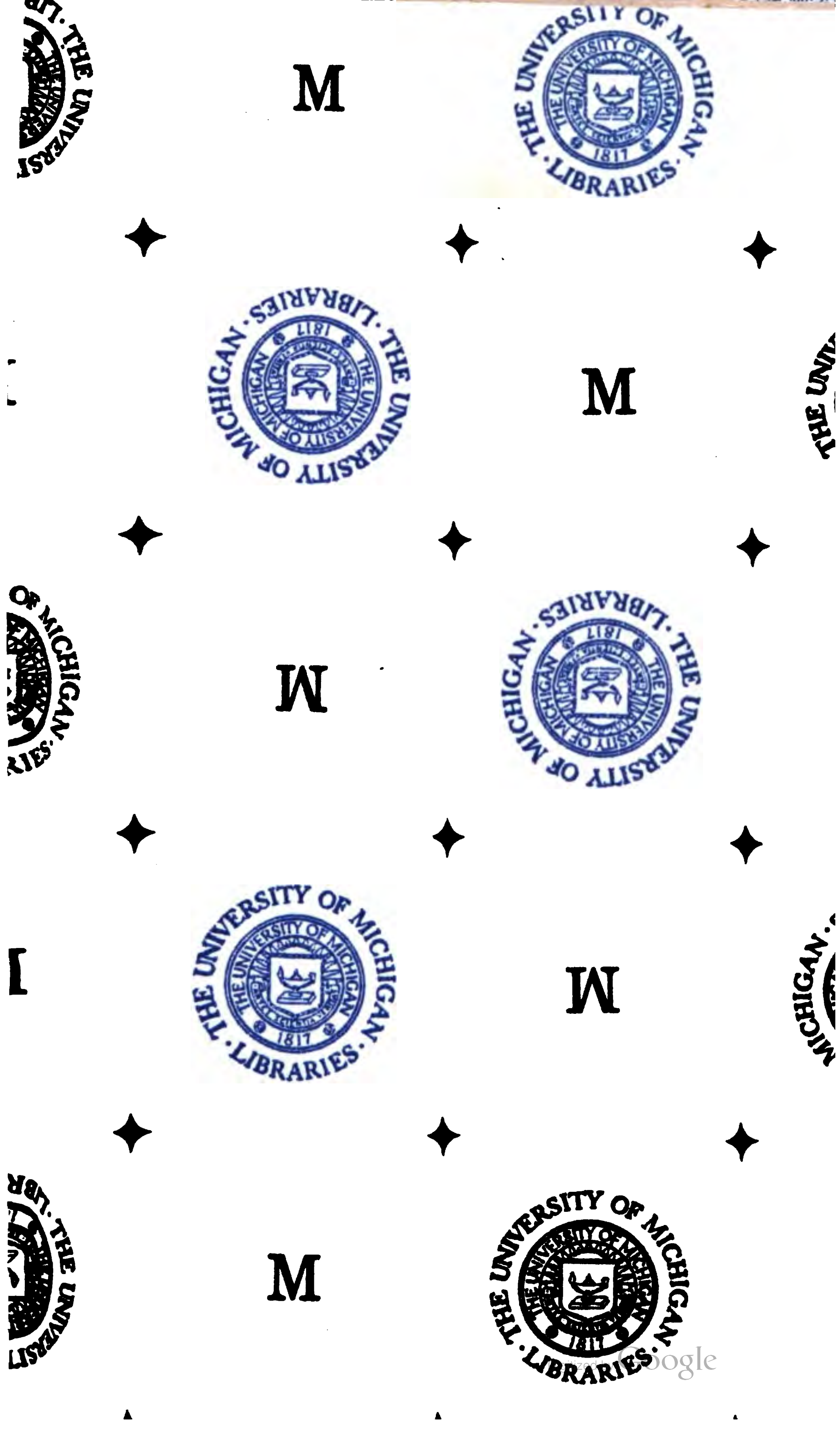

Digitized by Google


THE UNIVERSITY OF MICHIGAN · LIBRARIES ·
1817
M

INSTITUTIONS DE GEOMETRIE

ENRICHIES DE NOTES CRITIQUES & Philosophiques sur la nature & les développemens de l'Esprit humain.

AVEC UN DISCOURS SUR L'ETUDE DES *Mathématiques, où l'on essaye d'établir que les Enfans sont capables de s'y appliquer, augmenté d'une Réponse aux Objections qu'on y a faites.*

OUVRAGE UTILE, NON-SEULEMENT à ceux qui veulent apprendre ou enseigner les Mathématiques par la voye la plus naturelle, mais encore à toutes les Personnes qui sont chargées de quelque Education.

Jean Baptiste

Par M. DE LA CHAPPELLE.

Tome I.



A PARIS,

Chez DEBURE l'aîné, Libraire, Quay des Augustins, à l'Image S. Paul.
PIERRE-GUILLAUME SIMON, Imprimeur du Parlement, ruë de la Harpe, à l'Hercule.

M. DCC. XLVI.

Avec Approbation & Privilége du Roy.



A MESSIEURS LES ELEVES DU COLLEGE DE LOUIS LE GRAND.



MESSIEURS,

Vous êtes éléves d'une Société à qui j'ai des obligations essentielles. J'ai crû ne pouvoir mieux lui témoigner ma reconnoissance qu'en travaillant à vous être utile.

Un Livre fait pour vous devoit naturellement vous être offert. Celui-ci a pour objet d'applanir les difficultés de l'étude des Mathé-

matiques. Difficultés qui viennent beaucoup moins de la matiére qui y est traitée que du peu de justice que l'on rend à votre intelligence.

Il y a bien des gens qui prétendent que les Mathématiques ne doivent point entrer dans votre premiére éducation, qu'elles sont alors trop au-dessus de votre portée; qu'à peine peut-on parler à votre raison avant l'âge de quinze ou seize ans.

*Je leur ai répondu *, que dès l'âge de six ans vous aviez des yeux pour voir des lignes & des mains pour les tracer, que vous n'étiez point du tout embarrassez de compter, que je vous avois vû mille fois mesurer des longueurs avec des cordeaux, construire une infinité de petites figures où vous cherchiez de la simétrie: ce qui est, à le bien prendre, le véritable prélude des Mathématiques. Ne trouvez-vous pas que c'est avec raison que je m'éléve contre ces gens qui vous décrient?*

Le Livre, que je vous offre, a été composé en vue de soutenir les droits de votre raison, & de vous vanger de cette espéce de mépris où je soupçonne un peu de jalousie. Ces Discoureurs craignent que vous n'appreniez l'art d'avoir en très-peu de temps plus de raison qu'eux, & qu'ils ne paroissent bien-tôt des enfans devant vous, qui n'êtes pas encore des hommes.

* Dans le Discours suivant, dont la premiére partie parut en 1743.

Voilà, Messieurs, ce que m'a inspiré le sentiment que j'ai de votre capacité : mais il est nécessaire que vous joigniez vos forces à ma confiance. Si mon Livre soutient vos droits, il n'y a que vous qui puissiez soutenir les droits de mon Livre. En l'apprenant, vous prouverez encore mieux que moi la vérité de notre cause, & vous ne manquerez pas de vous attirer les éloges, sur lesquels il me semble que je dois être fort sobre dans un Ouvrage fait uniquement pour apprendre à les mériter.

Je suis avec un dévouement parfait,

Messieurs,

Votre très-humble & très obéissant serviteur DE LA CHAPPELLE.

AVERTISSEMENT.

UN Auteur qui suit des routes nouvelles, ne sçauroit prendre trop ses précautions; pour confirmer mes idées ou pour les améliorer, j'ai donc crû devoir m'adresser à Messieurs de l'Académie Royale des Sciences. Quoique l'usage de cette Académie ne soit pas d'examiner les Ouvrages, qui ne sortent point directement de chez elle, elle m'a fait la grâce de nommer des Commissaires, qui ont éxaminé mon Ouvrage avec un très grand soin. Messieurs les Commissaires s'étant abstenus de dire leur avis sur le Discours préliminaire, dont la plus grande partie a déja paru, & sur ce qu'il y a dans les nottes, qui n'a pas un rapport direct aux Mathématiques, ces matiéres n'étant pas précisément du ressort de l'Académie des Sciences, voici la conclusion du rapport qu'ils en ont fait à l'Académie.

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences.

Du 15 Janvier 1746.

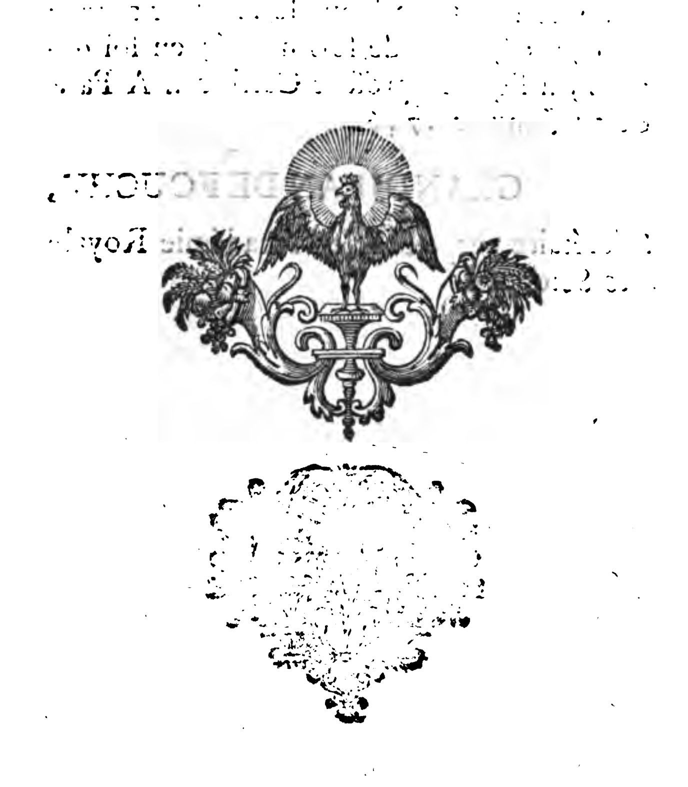
MEssieurs le Monnier & d'Alembert, qui avoient été nommés pour éxaminer un Ouvrage de M. de la Chap-

pelle, intitulé *Institutions de Géométrie*, &c. En ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé que cet Ouvrage méritoit son approbation tant par l'ordre & la clarté qui y régnent, que par la méthode nouvelle à plusieurs égards avec laquelle l'Auteur a traité un sujet déja tant de fois manié; en foi dequoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris ce 24 Janvier 1746.

GRANDJEAN DE FOUCHY,

Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.





AVERTISSEMENT.

AVERTISSEMENT.

FEU M. le Duc de la Trimouille, qui avoit, sur le sujet que l'on traite ici, des idées assez semblables à celles qui sont exposées dans ce discours, souhaita que l'Auteur les lui communiquât par écrit.

Elles produisirent l'effet que l'on pouvoit attendre d'un homme qui y retrouvoit souvent ses propres pensées.

Il fut arrêté que l'on en feroit l'essai en la personne du Prince de Tarente son fils, qui n'avoit alors que cinq à six ans; mais la mort enleva M. le Duc de la Trimouille, & ne nous laissa que le projet.

Cependant nous faisions de notre côté des expériences, qui établissoient incontestablement une vérité dont on a tâché ici de produire la cause.

Nous voyions depuis très-long-temps, & des esprits du premier ordre voyoient comme nous des enfans qui avoient commencé les Mathématiques à six ou sept ans, donner à la régle & au compas toute l'affection qu'ils ont ordinairement pour la danse ou pour le dessein. Faire de la Géométrie *étoit pour eux un divertissement.*

Nous comprîmes alors combien on étoit éloi-

gné de la bonne méthode, & ce qu'il y avoit à gagner à en prendre une nouvelle.

Il nous parut même assez bisarre que l'on s'exerçât pendant dix ans à l'étude d'une langue morte, tandis que l'on n'employoit qu'imparfaitement quelques années à former des raisonnemens, dont malheureusement encore la plus grande partie n'est guéres propre qu'à mettre du faux dans l'esprit.

Car, enfin, les actions des hommes, en général, sont une suite de leurs opinions. La bonté de ces actions dépend du rapport de convenance qui se trouve entre elles & le bien-être des hommes avec lesquels nous avons à vivre.

Afin qu'une vérité de cette force ait accès dans l'esprit des hommes, qui naturellement rapportent tout à eux-mêmes, on voit la nécessité de les y préparer de très-loin.

L'habitude de combiner des rapports de lignes, d'angles, quoiqu'en apparence étrangers à ce dessein, ne laissera pas de les disposer à se rendre attentifs : &, en vérité, c'est avoir fait le plus difficile, que de s'être rendu capable d'attention.

Voilà l'occasion, les expériences & les motifs qui nous ont déterminé à déduire ce que nous pensions sur cette matiere.

On ne doit point s'attendre ici à des traits ingénieux : On a cru qu'il valoit mieux s'at-

tacher à être ſolide, que de s'amuſer à parer ſon ſtyle. Le plus ſimple a paru le plus convenable à l'opinion où l'on étoit, que l'eſprit d'un pareil diſcours conſiſtoit à avoir raiſon.



DISCOURS SUR L'ÉTUDE DES MATHEMATIQUES,

Où l'on essaye d'établir que les enfans sont capables de s'y appliquer.

PREMIERE PARTIE.

LEs opinions prennent ordinairement naissance dans la coutume. On renvoye presque toujours aux derniers temps de l'éducation l'Etude des Mathématiques, & l'on croit que cela est très-bien fait.

Nous nous proposons l'examen de cet usage ; voici quel est notre plan. Comme une question bien exposée est à moitié résoluë, on va, par un détail bien circonstancié, établir précisément ce dont il s'agit. Quand notre objet sera en évidence, nous parcourrons les moyens d'y atteindre, nous examinerons nos facultés ; par-là, nous nous

assurerons si notre fonds est suffisant ; & , si il l'est, nous tâcherons de le mettre en valeur.

On a donné le nom de *corps* à tous ces objets qui frappent nos sens, qui nous environnent, dont nous sentons les rapports continuels avec notre être.

Tout le monde a éprouvé qu'on pouvoit les parcourir, & qu'on les parcouroit en effet; c'est-là de l'*étendue* : que cette étendue avoit différens sens, différentes directions ; ce sont ces *dimensions* : que l'on évaluoit ces dimensions, en les rapportant à une dimension déterminée ; que, par cette comparaison, on les trouvoit égales, ou plus longues, ou plus courtes ; c'est ce qu'on appelle *mesurer*.

On sçait encore qu'une distance ne s'estime que par sa *longueur* ; mais que l'étendue d'un appartement s'évalue en combinant sa longueur avec sa *largeur* ; & qu'enfin il faut ajouter à ces deux dimensions l'*épaisseur*, pour avoir d'une poutre une idée complette.

C'est sur ces dimensions si matérielles & si distinctes, que la Géométrie fait ses recherches & ses observations : elle employe les opérations d'une autre science, que l'on appelle *Arithmétique*, qui consiste à représenter, par certains signes toujours très-matériels, les combinaisons que l'on peut faire des dimensions de la matiere.

Jusqu'ici, & c'est de-là que la Géométrie part, nous n'avons encore rien que de très-sensible, de très-palpable; toutes choses dont les sens rendent témoignage à six ans comme à trente.

Car je laisse les discours alambiqués de ces Métaphisiciens pointilleux, qui veulent absolument que la Géométrie ait ses articles de foi comme la Théologie.

Ils ne cessent de lui reprocher, que ses surfaces, ses lignes, ses points, n'existent pas dans la matiere.

Je ne vois cependant rien qui soit plus continuellement en expérience. Les Géométres n'ont point de lignes, de surfaces, de points différens de ceux que la matiere leur offre; ils mesurent ce qu'ils voyent, ce qu'ils touchent, ce qu'ils parcourent.

Il est donc évident, que les premiers élémens du Géométre posent sur la matiere la plus exposée à nos sens; que toute la différence qui se trouve entre un homme ordinaire & celui qui a quelque teinture de Géométrie, c'est que le premier n'a pas été plus loin que les premieres notions, & que le second en a suivi le développement. Mais les sens ont toujours servi de conducteurs. Il n'y a eu en tout cela que des lignes plus ou moins longues, des angles plus ou moins grands, des surfaces plus ou moins étendues, des corps plus ou moins épais.

En déduisant des premieres perceptions les propriétés les plus éloignées de leurs principes, il n'a fait que comparer : comparer, c'est mesurer. Je vois toujours les sens en exercice. Veut-il les rappeller à leur origine, & les ranger dans l'ordre de leur génération, c'est encore une affaire de mémoire ; & la mémoire dépend des sens : elle n'est que le miroir de ce qu'ils ont vû.

Je ne dis pas que, dans une figure compliquée, les sens apperçoivent la grandeur relative des angles & des lignes ; mais je me souviens que des figures plus simples m'ont offert les rapports de ces lignes ou de ces angles placés dans les mêmes circonstances. Ce que j'ai vû m'assûre de ce que je ne vois pas.

Un angle ne me paroît pas droit ; le parallélisme d'une ligne n'est pas décidé. Je fais passer en revûe tous les symptômes qui peuvent m'annoncer la présence d'un angle droit ou d'un parallélisme ; véritable jeu de ma mémoire, qui fait la fonction de mes sens.

Mais, dira-t'on, c'est ici la grande difficulté. Comment voulez-vous embrasser l'enchaînement d'une longue suite de propositions, sans avoir l'intelligence bien affermie ?

1°. Cette chaîne de propositions ne se rencontre guéres dans les élémens, où une vérité se manifeste à l'aide de trois ou quatre autres tout au plus.

2°. A mesure que les vérités se placent dans la tête, l'intelligence prend de la consistance : peu-à-peu elle acquiert la force de se soumettre ce qu'il y a de plus élevé.

3°. Enfin, voyons ce qui se passe en nous, quand nous lions dix vérités ensemble, que nous passons de la premiere à la seconde, de la seconde à la troisiéme, &c.

L'on trouvera, ce me semble, que, pour arriver au bout de la chaîne, l'on a précisément besoin d'appercevoir bien clairement une liaison nécessaire entre la seconde & la premiere, que l'on suppose d'abord, ou évidente, ou démontrée, que l'on a droit ensuite, sans s'embarrasser de la premiere, de se reposer sur la seconde, pour tenter le passage à la troisiéme. Ce passage une fois franchi, vous négligez tout le chemin fait, & vous ne mettez plus votre attention qu'à vous assûrer de la connexion de la troisiéme à la quatriéme ; & ainsi de suite.

Je ne conçois pas que l'on puisse autrement conserver ou acquérir l'évidence des vérités fort éloignées de leurs principes. Or la difficulté n'est pas grande ; il n'y a jamais qu'un simple raisonnement à saisir.

Les sens sont donc, en Géométrie, nos premiers maîtres, & ils conservent une grande autorité dans toute la suite de nos raisonnemens.

On ne feroit pas fondé à dire que les enfans n'apperçoivent pas les premieres propriétés des corps aussi-bien que les hommes faits; ils donnent des signes évidens du contraire : on ne les voit occupés qu'à cela. D'un autre côté, un raisonnement simple sur les choses de leur portée, ne les touche pas moins que les objets les plus matériels : enfin, on ne leur conteste pas la mémoire.

Pour peu, maintenant, que l'on suive les dévelopemens de l'esprit humain, que l'on fasse attention à cette extrême curiosité qui agite les enfans, à cette mobilité qui les pousse aux opérations mécaniques, nous ne doutons pas que l'on ne se rapproche de l'idée, que peut-être de toutes les sciences, celle des Mathématiques est la plus à portée des enfans.

Des angles, des lignes, des cercles, ne sont faits que pour frapper les sens; il n'y faut guéres autre chose que les yeux & la main.

Joignez-y seulement la portion d'intelligence nécessaire, pour appercevoir que deux grandeurs égales à une troisiéme sont égales entr'elles; (vérité d'ailleurs qui se manifeste tout matériellement, en posant deux grandeurs sur une même mesure qui leur soit égale.) En voilà assez pour découvrir dans la matiere un grand nombre de rapports, & pour accoûtumer l'esprit à des vérités solides....

Au-pis-aller, quand cette ſuite de vûes ne ſeroit que de la mémoire, elle ſeroit toujours fort préférable à ce faux merveilleux dont on remplit la tête des enfans.

Sans avoir beaucoup d'expérience, on ſait que les idées qui nous viennent par les yeux, font des traces beaucoup plus profondes dans le cerveau, que celles qui ne portent que ſur des mots. Que le diſcours vous peigne dix mille fois, avec les traits les plus reſſemblans, un homme que vous n'avez jamais vû, jamais vous ne le reconnoîtrez ſi bien que ſi vos yeux l'avoient remarqué une ſeule fois.

L'organe de la vûe vient preſque toujours au ſecours en Géométrie : il s'y agit, au moins auſſi ſouvent, de voir, que de ſe reſſouvenir. On eſt un peu trop prévenu que cette ſcience ne combine que des idées abſtraites.

Cependant nous ſommes naturellement portés à compter & à meſurer : le ſeul inſtinct nous méne là.

Des enfans prennent-ils la largeur d'un chemin? La perpendiculaire eſt la ligne qu'ils cherchent; (ils n'en ſavent pas le nom, mais le nom ne fait rien aux idées.) Ils ne veulent pas qu'elle biaiſe; ils ont grand ſoin que celui qui eſt à l'autre bout de la corde, ſoit bien de face avec le premier; ils font de la Géométrie ſans le ſavoir.

Nous ne croyons pas dégrader cette ſcience, en diſant qu'elle ne nous préſente, pour ainſi dire, que des idées groſſieres ; elle eſt aſſez relevée par ſa certitude & par ſon utilité : elle peut donc prendre facilement ſur des eſprits qui ne font encore uſage que de leurs organes.

Il n'en eſt pas ainſi des Belles-Lettres, des compoſitions de goût. La connoiſſance du cœur humain, de ſes paſſions, de ſes fantaiſies, un long uſage des coûtumes, des préjugés, des bienſéances, une habitude de voir le ridicule, de ſçavoir le ſaiſir où il eſt, & d'en placer la peinture où il faut, doivent avoir préparé l'eſprit à la lecture des ouvrages de ce genre.

Tout le monde ſçait, que Virgile, Horace, Ovide, Catulle, que tous les Ecrivains polis démêlent dans les paſſions ce qu'il y a de plus ingénieux.

Où veut-on que les jeunes gens prennent un modéle ſur lequel ils évaluent ces Auteurs ? Ou ils n'ont pas aſſez vécu, ou, ce qui revient au même, ils n'ont pas aſſez réfléchi. Horace & Virgile doivent être lûs à quinze ou vingt ans, où l'on a déja quelques principes de goût & de mœurs. Euclide peut être étudié à ſix ans ; l'on a, à cet âge, des yeux & des mains.

L'important, à l'égard des enfans, eſt d'exciter leur attention ; de la matiere, des fi-

gures, du mouvement, rien n'eſt plus propre à cet effet. Ils tiennent continuellement à ces choſes, & ils veulent y tenir. Pourquoi apprennent-ils ſi facilement à jouer à des jeux qui demandent des combinaiſons aſſez fines. C'eſt que tout y parle aux yeux.

Ne donnons point à la raiſon un air étranger: laiſſons la paroître ſous ſa forme naturelle, bien revêtue des qualités ſenſibles, ſa premiere & apparemment ſon unique origine.

On ſe tourmente beaucoup à faire apprendre. Peut-être ſeroit-il plus raiſonnable de travailler beaucoup ſur la maniere d'apprendre; les difficultés vaincues d'un côté n'en laiſſeroient guéres de l'autre.

Les purs ſpéculatifs n'approuveront pas les vûes que nous avons de tourner continuellement l'eſprit vers la matiere.

Nous ne déſeſpérerions pourtant pas de les amener à notre avis, s'ils pouvoient s'accommoder de l'idée que l'on ſe perfectionne dans l'uſage de ſa raiſon, comme dans l'exercice des Arts mécaniques.

Le Politique & le Philoſophe ne ſe forment pas autrement que l'Architecte & l'Aſtronome; & ces derniers ſe forment ainſi que le Maſſon & l'Arpenteur.

Chacun, de ſon côté, fait & refait, répete dix mille fois les actes qui forment les habitu-

des de ſon état. L'Aſtronome obſerve ; c'eſt auſſi ce que fait le Politique : tous deux font de leurs yeux le plus d'uſage qu'il leur eſt poſſible.

L'objet de la Géométrie eſt bien autrement ſenſible que celui du Politique & de l'Aſtronome. L'exceſſive diſtance des aſtres, les ruſes de l'intérêt, & les ſoupleſſes de l'amour propre, répandent bien des nuages ſur les yeux des obſervateurs : avec de longs travaux & des réfléxions profondes, ils ne peuvent ſouvent parvenir qu'à nous donner des conjectures.

Les Géométres ne ſçauroient être plus près de leur objet qu'ils le ſont, ils le voyent, & ils le touchent.

On ne peur donc rien trouver qui ſoit mieux aſſorti au caractére des enfans, qui veulent toujours agir, voir, toucher, que la ſcience des Mathématiques, très-viſible & très-maniable en ſes élémens.

Tracer une ligne, décrire un cercle, élever une perpendiculaire, mener des paralleles, tirer des tangentes, former des angles, les meſurer, les aggrandir, les diminuer toujours de l'action, toujours de l'amuſement, &, par conſéquent, toujours du progrès. On retient avec plaiſir les leçons que le plaiſir donne.

Puiſque la raiſon ſe perfectionne par l'e-

xercice, comme tout le reste; que les vérités élementaires nous viennent par les sens; que les figures, que l'on apperçoit par tout, rappellent sans cesse les idées Mathématiques, que la mémoire supplée aux sens quand les objets matériels manquent de nous affecter: Pourquoi les enfans, qui ont des yeux & de la mémoire, se refuseroient-ils à des idées qui sont si proportionnées à ces sens?

Aussi l'expérience est-elle hautement pour nous. Si le préjugé dominant empêche que l'on en fournisse un grand nombre d'exemples, au moins tous ceux que l'on a, témoignent en faveur de cette idée.

C'est un fait que l'on est très à portée de vérifier à Paris, où il n'est pas rare de trouver des peres de famille, qui ne livrent pas au préjugé vulgaire l'éducation de leurs enfans, & auprès de qui une coûtume généralement reçûe, n'en est pas moins généralement mauvaise; c'est un fait, que des enfans mis aux Mathématiques dès l'âge de six ans, y font non-seulement des progrès très-sensibles, mais qu'ils se portent aux opérations de ces sciences avec une sorte de volupté.

En effet, rien ne peut être mieux reçû des hommes, que ce qui leur prouve leur superiorité: Telle est l'heureuse illusion de la Géométrie, que nous croyons avoir inventé les figures que nous avons construites de

nous-mêmes, ou les problêmes que nous avons résolus : c'est que la vérité appartenant à celui qui la voit, nous dispense d'en faire hommage à quelqu'autre ; & l'on ne peut pas manquer d'être content d'une acquisition importante, que l'on ne doit qu'à soi-même.

Les enfans marquent, bien autrement que les hommes faits, les caractéres d'indépendance ; ils ne se plaisent tant aux objets de leur amusement, que parce qu'ils les ont choisis eux-mêmes.

La nature n'étant qu'un vaste livre, qui répéte, sous mille formes différentes, les notions géométriques, les enfans aimeront à y reconnoître des angles, des cercles, des quarrés, des paralleles.

Appliquant ainsi leurs premieres idées, ils exercent d'eux-mêmes leur petit raisonnement. Si on les écoute, que l'on applaudisse à leurs essais, leur machine se monte à raisonner : cette habitude influe sur les autres objets de l'éducation.

Naturellement nous sommes portés à imiter ceux avec qui nous vivons. A force de demander aux enfans pourquoi tels & tels procédés pour mener une parallele, ou pour tirer une tangente, ils vous demanderont, à leur tour, pourquoi une pierre va se perdre au fond de l'eau, pourquoi le bois y surnage, pourquoi

pourquoi l'eau elle-même s'élance en l'air en certains cas ?

Par-là, ils verront les choses, au lieu de les retenir. L'esprit passera peu à peu des opérations de la mémoire à celles de l'intelligence. En un mot, ils seront frappés d'une lumiere, & non pas chargés d'un poids.

Avoir fait sentir que les enfans étoient capables d'entendre les Mathématiques, c'est avoir démontré la nécessité de les leur apprendre dès l'âge le plus tendre. L'utilité de ces connoissances est si généralement reconnue, qu'il seroit superflu d'en donner des preuves.

Mais risquerai-je une conjecture ? Je suis tenté de croire que les vérités Mathématiques ne sont jamais si utiles que quand elles sont enseignées dès les premieres années de l'éducation.

Mon opinion est fondée sur ce que les enfans peu capables d'appercevoir par eux-mêmes, ne voyent que ce qu'on leur montre. Vuides encore de toutes connoissances, leur cerveau ne demande qu'à se remplir, il reçoit tout, il ne refuse rien. Voyez avec qu'elle facilité les absurdités même viennent s'y placer !

Ajoutez à cela, qu'une raison plus formée envisage sur son objet une foule de difficultés qui l'arrêtent : les enfans n'y pensent pas ; & même n'y peuvent pas penser.

C'est que les difficultés ne viennent que des sujets de comparaison ausquels nous rapportons tout ce que l'on offre à notre intelligence ; distraction qui, manquant aux enfans, ne leur donne pas lieu d'être difficultueux, & ne leur laisse que de la curiosité.

Il est donc très-important d'être fort réservé sur les premieres impressions que leur cerveau peut recevoir, & de ne leur présenter que celles qui peuvent être la source d'un discernement sûr & d'une conduite juste.

Les obstacles que les enfans opposent de ce côté, sont beaucoup moins considérables que ceux qui sont à surmonter dans les personnes un peu plus faites.

Les hommes ont naturellement le désir de se distinguer : de cette passion, la société en a fait l'envie de plaire. Les jeunes gens, prêts d'entrer dans le monde, ne recherchent que les connoissances qui décorent, où les talens qui rendent agréables. Avec les Mathématiques, on n'est, ni joli, ni plaisant. C'est un temps perdu pour les agrémens, que le temps employé à l'acquisition de ces sciences : on les néglige.

Les enfans, au contraire, n'ont pas encore besoin de ces connoissances qui font l'amusement du monde ; ils ne voyent rien à perdre pour eux d'apprendre une science inutile à

un dessein qu'ils n'ont pas encore. Peu leur importe d'ignorer ces jolies bagatelles, ces sentimens artificiels, dont il faut se parer dans le commerce du monde; acquisition néanmoins qui coûte peut-être à l'esprit des combinaisons plus fines que la découverte de bien des vérités qui ont illustré leurs inventeurs.

Mais voici une considération d'une toute autre importance. A quinze ou vingt ans, la tournure de l'esprit est à peu près acquise, les nouvelles connoissances ne vont plus jusqu'au fonds du caractere, il est formé, & l'on vient trop tard pour le changer.

On pourra bien charger la mémoire ou l'intelligence de différentes vérités; mais alors ce ne sera point par elles *que les objets seront* apperçûs. On se servira toujours des yeux d'une habitude antérieure. Nous ne voyons ordinairement que de la maniere dont la premiere éducation nous a fait voir.

L'enfance a cet heureux avantage de pouvoir prendre le pli qu'on veut. Elle n'en a aucun. Tournez-la du côté des Mathématiques, bien-tôt l'esprit de combinaison, qui caractérise si particulierement ces sciences, ne sera plus distingué de son être personnel. Nous nous formons, pour ainsi dire, sur les choses que nous apprenons de bonne heure. Accoutumés à combiner, nous combinerons

ſur tout ; & ce qui eſt un travail ſi pénible pour le commun des hommes, ne ſera pour nous que la marche ordinaire de notre eſprit.

Nous ne diſſimulerons pas que quelques perſonnes reprochent aux Mathématiques d'eteindre l'imagination.

La briéveté que nous nous ſommes propoſée, ne nous permet pas de nous étendre ſur la réponſe à cette objection. On pourra voir quelque jour comment nous établirons, que les Mathématiques ont le double avantage de fortifier l'imagination & de la modérer.

Mais, en attendant que nous expoſions ce tableau, nous ferons remarquer que l'on peut anéantir l'objection ſans reſſource, moyennant cinq ou ſix faits : on en trouve chez les anciens & chez les modernes.

Pytagore étoit, de ſon temps, un très-grand Géométre, & Platon avoit, dans les Mathématiques, des connoiſſances fort diſtinguées ; néanmoins leur Géométrie eſt encore moins célébre que leur imagination.

Paſchal, preſque de nos jours, a fait en Mathématiques de hautes découvertes. Mallebranche, Arnauld, Nicole, ſçavoient fort bien la Géométrie. Nous croyons pourtant qu'on ſeroit fort embarraſſé de nous oppoſer des perſonnages qui euſſent l'imagination

plus brillante, ou le génie plus fécond.

Combien verrions-nous s'accroître le nombre de ceux qui déposent en notre faveur, si nous prenions nos exemples parmi les illustres Géométres avec qui nous vivons.

Il y en a des plus célébres, qui sont, & beaucoup d'autres qui méritent d'être de l'Académie Françoise, société établie pour être la récompense des talens les plus aimables.

C'est sans doute l'amour des Belles-Lettres qui préoccupe ceux qui sont d'une opinion contraire à la nôtre.

Cependant, si un reproche se détruisoit par l'opposition d'un reproche, on diroit que les Belles-Lettres amolissent les mœurs. De quelque côté que l'on se tourne, il y a des inconvéniens.

Mais, en général, il paroît que la société n'a pas moins besoin de bons esprits que de beaux esprits *.

La propagation de la raison universelle, cet instrument si utile au gouvernement des autres & de soi-même, est dûë principalement à des esprits réfléchis, qui ont plus recherché à remonter aux causes des évenemens, qu'à en jouir.

Descartes, Hobbes, Grotius, Leibnits,

(a) Ce n'est pas dire que le bel esprit exclue le bon esprit : Il nous semble seulement que les sciences sérieuses ménent au bon esprit un peu plus directement que les Belles-Lettres.

ne faisoient point les agréables ; mais ils ont autant contribué à notre bonheur, par le sérieux de leurs observations, que tous les beaux esprits du monde par les amusemens qu'ils nous ont fournis.

Au reste, ce seroit prendre mal notre pensée, que de nous attribuer l'intention de mettre, s'il est permis de le dire, tout l'esprit d'un jeune homme en Mathématiques. Nous croyons seulement, que de toutes les sciences qui concourent à perfectionner l'éducation, les Mathématiques ont droit au privilége d'être particulierement cultivées : leurs principes sont sous nos yeux & sous nos mains ; des corps, un compas, une regle. Un enfant peut agir ici comme un homme fait. Au lieu que les autres sciences demandent, pour être raisonnablement entendues, une suite d'expériences, qu'il n'est possible d'acquérir qu'après le temps de l'éducation.



SUITE DU DISCOURS SUR L'ETUDE MATHEMATIQUES,

Où l'on essaye d'établir que les enfans sont capables de s'y appliquer. Réponse aux Objections. Dessein de cet Ouvrage.

SECONDE PARTIE.

VOilà où finissoit ce Discours lorsqu'il parut pour la premiere fois. Beaucoup de gens le condamnerent sur la simple nouvelle de son éxistence : quelques-uns firent des objections ; mais il eut le bonheur de réunir les suffrages de presque tous les Mathématiciens, principalement de ceux qui s'étoient le plus attachés à observer les développemens de l'esprit humain.

Une opinion fut-elle fausse, ceux qui la condamnent sans éxamen ne méritent aucune considération ; mais on doit des égards à ceux

qui en ont porté un jugement réfléchi. S'il est juste, nous apprenons à nous conduire sur de meilleurs principes ; s'il ne l'est pas, il donne lieu à des éclaircissemens : & tout cela contribue à l'utilité publique qu'un Ecrivain doit envisager comme le but le plus honorable qu'il puisse se proposer.

Aussi les esprits les plus modérés regardent la premiere production d'une idée nouvelle ou singuliére, comme une tentative avec laquelle on ne doit que pressentir le goût du public. C'est un avertissement qu'on lui donne, que s'il tournoit sa vuë d'un certain côté, il pourroit y trouver des avantages jusques alors inconnus. En effet, les choses les plus utiles à la société sont négligées, moins parce qu'elles sont difficiles, que parce que l'on n'y a pas fait attention.

Cette maniere de penser nous conduit à témoigner notre reconnoissance à ceux qui se sont donnés la peine de réfléchir sur l'objet de ce Discours. M. de Mont-Carville, (a) un des Auteurs du Journal des Sçavans, & habile Mathématicien, a fortifié notre opinion par un grand nombre d'idées, qui lui sont si propres, que l'on peut regarder son Extrait comme un nouveau Discours sur la même matiére.

(a) Journal des Sçavans mois de 1743.

Le Pere Castel (*a*), dont le nom est si connu des Mathématiciens modernes, nous a honorés d'une approbation sans réserve sur le fonds de notre sentiment. Cet Auteur célébre observe que l'idée n'en est pas tout à fait neuve, qu'on a dû la remarquer en différens morceaux de sa composition qu'il a publiés depuis vingt ans dans les Journaux de Trevoux; nous ajouterons de notre côté qu'elle n'avoit pas échappé aux anciens, Platon, Ciceron, & sans doute bien d'autres Philosophes sont entrés dans cette pensée; mais il y a bien loin d'une opinion que l'on approuve à la découverte & à l'enchaînement des raisons qui servent à l'établir: quelques traits échappés, un mot dit à l'occasion de toute autre chose font très-peu d'impression; il falloit traiter *d'office* cette matiére; ce qui n'avoit, au moins que je sçache, été exécuté par personne.

Nous ne sçaurions aussi nous dispenser de reconnoître publiquement combien nous avons été sensibles aux égards avec lesquels un troisiéme critique (*b*) a censuré notre opinion; il condamne absolument l'objet principal de ce Discours, qui consiste à faire sentir qu'il est plus avantageux de commencer les Mathématiques dès les premiers tems

(*a*) Journal de Trevoux, Février 1745.
(*b*) Journal hist. de Verd. Novembre 1743.

de l'éducation, que de les renvoyer à seize ou dix-huit ans, suivant l'usage le plus ordinaire : *Je crois*, dit cet Auteur, *qu'il est utile à tout le monde d'avoir une teinture des Mathématiques ; mais je ne pense pas qu'on doive renverser l'ordre de l'éducation pour initier les enfans dans cette science, à moins qu'on ne les destine uniquement à une pareille étude, dans la vuë de les préparer à une profession dont les Mathématiques seroient la base.*

C'est nous accorder à peu près tout ce que nous demandons ; il y a un grand nombre d'états dans la Société qui éxigent une connoissance assez étenduë des Mathématiques. La Peinture, l'Architecture, la Navigation, presque tous les Arts en ont besoin, mais principalement celui de la Guerre, où les plus petites fautes d'ignorance sont très-souvent funestes, ou pour le moins très-dangereuses.

Cependant nous envisageons l'étude des Mathématiques beaucoup moins par l'utilité particuliere qui en revient à tous les Arts, que par l'influence générale que ces sciences peuvent avoir sur les esprits : la rigueur & le scrupule avec lesquels les Mathématiciens observent les objets de leurs spéculations, accoutument l'ame à revenir sur elle-même, à se défier de ses premieres vuës ; or se défier, c'est penser, c'est marcher dans la re-

cherche de la vérité avec la circonspection d'un homme qui craint à chaque pas de tomber dans l'erreur qui l'environne : cette disposition d'esprit constitue le principal mérite de ceux qui sont destinés à commander à d'autres.

En général la sureté des états, la législation & le commandement des Armées sont remis entre les mains d'hommes d'une grande naissance ou d'un mérite distingué. Les enfans qui doivent leur succéder un jour, & à qui l'on remettra, pour ainsi dire, le sort des Etats, ne sçauroient commencer de trop bonne heure, ce que l'on commence toujours trop tard, l'art de lier ses idées.

Cependant personne n'ignore combien il est rare que les enfans destinés aux Dignités les plus importantes apprennent les Mathématiques avant l'âge de quinze ou dix-huit ans; parce que l'on suppose toujours qu'il faut une raison très-formée pour être initié dans ces sciences. Ce préjugé est la source de deux inconvéniens très-considérables ; on commence trop tard les Mathématiques, & on ne les apprend pas assez long-temps.

A quinze ou dix-huit ans les passions sont sur le point de causer dans l'ame un grand désordre. La raison n'est pas assez fortifiée contre leurs atteintes; elle est vaincuë, parce qu'elle ne connoît pas toutes ses ressour-

ces. L'esprit est alors dans le temps de la plus grande dissipation, on commence à être occupé de personnes que l'on veut s'attacher, d'une dignité, d'un établissement; mais beaucoup plus encore des agrémens que le monde offre à cet âge, & qui pénétrent si profondement des ames toutes neuves. Nous en appellons au sens le plus commun, est-ce bien choisir son temps que de commencer les Mathématiques à un âge si sujet à rompre le frein de la raison & de la docilité.

Si les enfans destinés, par leur naissance à commander aux autres, doivent s'appliquer aux Mathématiques dès les premieres années de l'éducation, parce que ces sciences sont la base de l'Art militaire & de la politique qui est toute de calcul; nous ne voyons pas pourquoi ce Critique prononce que *dans toute autre circonstance l'Etude des Mathématiques commencée à vingt ans, & portée plus ou moins loin, suivant la destination des sujets, est beaucoup moins déplacée* : nous en avons déja dit la raison, cette étude est déplacée à vingt ans, parce qu'à cet âge l'on est fortement tenté de s'occuper de toute autre chose, & qu'elle ne sçauroit plus influer dans une éducation qui est totalement finie.

Cet Auteur ne nous sçaura pas mauvais gré sans doute d'observer qu'il nous donne son sentiment sans l'appuyer d'aucune raison;

ce qu'il eſt fort difficile de paſſer à un Critique de profeſſion qui ſçait mieux que tout autre que décider n'eſt pas juger. Néanmoins il continue de nous dire, *il y a bien d'autres réformes à faire dans l'éducation, comme je le ferai voir particulierement par l'extrait d'un excellent livre nouveau que j'ai annoncé il y a déja aſſez long-temps.*

Cet excellent livre, dont le Critique veut parler, eſt le livre de M. Morelli, qui a pour titre *Eſſai ſur l'eſprit humain ou principes naturels d'Education.* Cet ouvrage nous paroît ſi eſtimable que nous ne ſçaurions trop conſeiller à ceux qui ſont chargés d'une éducation de ſe rendre propres les vuës profondes que l'Auteur a ſi abondament répanduës dans tout ſon ſyſtême. Nous avouerons qu'après avoir lû cinq ou ſix pages de ce livre, nous fûmes un peu honteux, ſur la parole du Critique, d'être en oppoſition avec un homme ſi capable de réfléchir. Malgré la multitude d'obſervations, dont nous avions fortifié une expérience de plus de dix années, nous nous remîmes à chercher les côtés foibles de notre opinion : cependant nous avancions dans la lecture de l'*Eſſai*, &c. lorſque nous tombâmes ſur la page 50 ou M. Morelli s'explique en termes formels en faveur de notre opinion. Citons-le lui-même. *Les premieres idées ſe forment par la fréquentation des ob-*

jets sensibles, & par tout ce que les yeux peuvent présenter à l'imagination dans l'Arithmétique, le dessein, la Peinture, la Géométrie pratique, &c........ pour l'Arithmétique, il dit page 103. *qu'il s'agit de faire acquérir à un enfant l'idée de nombre par celle d'unité, qui est la plus simple que nous ayons pour cela; qu'on lui fasse apprendre de bonne heure à compter & à calculer d'abord jusqu'à dix, puis jusqu'à vingt, & ainsi de suite, en lui rendant sensible par des jettons ou des points de dez, chaque unité, qui jointe aux autres prises toutes ensemble fait le nombre qu'il nomme: il faut ensuite lui donner l'idée des signes qui marquent les nombres en prenant garde qu'il ne sépare, comme il arrive souvent, l'idée du signe, de sa signification; si on n'a pas soin de les rapprocher. Il retiendra, par exemple, que cette figure 5 s'appelle cinq, sans se souvenir ou faire attention qu'elle exprime cinq fois une unité, ce qui fait bien voir combien dans cet âge on est peu capable de lier des idées & de raisonner* (a). *Quand un enfant sçait compter & connoître les chiffres par la figure & par la valeur; il faut l'exercer beaucoup sur le calcul & par cœur & par écrit, jusqu'à ce*

(*a*) Ce n'est pas un défaut des enfans lorsqu'ils n'attachent pas aux mots l'idée qui leur convient: cela vient de la maniére vicieuse & ignorante dont on les enseigne. Ils raisonnent très-bien sur leurs petits intérêts, ce qui prouve leur capacité de lier des idées.

que l'habitude le lui ait rendu si facile qu'il ne reste plus qu'à lui donner dans un âge plus avancé la théorie après la pratique pour le rendre imperturbable (*a*) *: on sçait combien cette science est utile à tout le monde.*

Les vérités de la Géométrie élementaire sont si simples, si naturelles & si frappantes, qu'il semble d'abord que ce soit un jeu de la raison; mais on ne tarde pas à connoître qu'elle est la vaste étenduë de l'esprit humain, qui peut s'accoutumer à embrasser tant de choses à la fois : c'est au sensible de cette science qu'il faut d'abord appliquer un enfant, je veux dire aux figures telles que le point, la ligne, l'angle, le triangle, le quarré, les poligones, le cercle, les plans & les solides, lui faisant remarquer sur la figure même ses principales propriétés; qu'un quarré, par exemple, à 4 côtés & 4 angles égaux : on peut, pour qu'il sente mieux la chose, les lui faire mesurer avec le compas. Lorsqu'il connoît bien les principales figures, on peut encore lui faire exécuter sur le papier tous les problêmes les plus aisés de la Géométrie, tels que les différentes éleva-

(*a*) La Théorie de l'Arithmétique ordinaire est si simple qu'elle n'excede point la capacité des enfans : j'ai éprouvé au contraire que des enfans de sept à huit ans comprenoient les raisons d'une opération beaucoup plus vîte qu'ils ne sçavoient les réduire en pratique : c'est pourquoi on ne doit jamais séparer la Théorie de la pratique : c'est un moyen plus prompt d'apprendre les Régles, & d'être moins exposé à les oublier.

tions des perpendiculaires, l'inscription & la circonscription des figures, leurs divisions & leurs élevations. Lui apprendre les différens usages des instrumens de Mathématiques, à construire une échelle, un plan de Fortification ou d'Architecture civile, &c.

Peut-on s'expliquer plus clairement sur les avantages & la facilité qu'il y a d'enseigner aux enfans les premiers élémens de l'Arithmétique & de la Géométrie. Cette opinion étoit si nécessairement liée avec les principes de l'*Essai*, &c. qu'il auroit fallu l'en déduire si l'Auteur ne l'avoit pas fait lui-même.

Nous avons donc été un peu surpris de voir censurer *dans le Disconrs sur l'Etude des Mathématiques*, ce que l'on paroît approuver dans l'*Essai* (*a*).

(*a*) Notre dessein a toujours été d'en agir avec l'anonime d'une maniere à éviter tout soupçon de fausse imputation, qu'il ne se plaigne pas que nous ayons détourné le sens de ses paroles ; nous convenons qu'il n'a pas dit formellement que M. Morelli fut en opposition avec nous : mais ces paroles, *il y a bien d'autres réformes à faire dans l'éducation, comme je le ferai voir particulierement par l'Extrait d'un excellent livre nouveau*, signifient bien clairement que la réforme, que nous proposons, n'est pas une réforme à faire, que M. Morelli en propose bien d'autres. Tout cela insinue, ce me semble, que M. Morelli n'est pas de notre opinion, d'autant plus que l'Anonime allegue cet estimable Auteur à l'occasion de la censure qu'il fait de notre systême. Si pourtant cet Auteur trouvoit que nous pressons un peu trop ses paroles ; au moins il faut qu'il convienne qu'il a oublié de censurer dans l'*Essai* une opinion qui y est établie

On

On pourroit justifier la diversité de ce jugement par la différence qui se trouveroit entre les principes de l'Essai & ceux du Discours; mais ils sont si parfaitement les mêmes, que l'on seroit tenté d'accuser l'un ou l'autre de plagiat, si l'on ne pensoit pas à cette vérité, *qu'il est bien difficile que des machines, qui ont des ressorts semblables, ne se remuent pas quelque fois de même façon.*

Pour mieux faire entrer le public dans l'idée où nous sommes que les Mathématiques proposées d'une maniére convenable sont très-accessibles aux enfans, & beaucoup plus propres au développement de leur raison naissante que toute autre science, nous avons comparé les élemens des Mathématiques avec ceux des Belles-Lettres.

On ne parle de rien en Géométrie dont on n'ait une idée bien palpable, une idée qui ne suppose aucune expérience; une ligne & un angle tracés sont tout aussi évidens à un enfant qu'à un homme fait. Mais quelle énorme provision d'idées faut-il avoir faite pour comprendre des mots d'une abstraction (*a*) aussi violente que les mots d'*Ablatif*, de *Supin*, de *Gerondif* qui sont si familiers à

sur les mêmes principes, dont on l'a déduite dans le *Discours sur l'Etude des Mathématiques*.

(*a*) Il y a de *l'abstraction* dans une idée, lorsque l'on ne sçauroit la comprendre qu'en dégageant son esprit de tout objet matériel.

ceux qui apprennent la Grammaire (*a*).

Nous allons plus loin : que l'on prenne au hasard vingt personnes qui composent une société, je les suppose toutes instruites du Latin, on n'en trouvera pas peut-être une seule qui entende ou qui puisse faire entendre la valeur de ces mots : c'est une expérience que tout le monde peut faire comme nous.

L'induction que nous avons tirée étoit donc bien naturelle. Les Elémens des Mathématiques, où l'on entend tout, sont plus aisés & plus utiles aux enfans que ceux de la Grammaire où ils n'entendent rien.

Néanmoins le Critique anonime nous reproche *de nous laisser emporter un peu trop loin par notre zêle pour les Mathématiques. On ne met*, dit-il, *les Auteurs Latins entre les mains de l'enfance, ni même entre celles de la jeunesse que pour les former dans la belle latinité, & l'on n'est pas à vingt ans plus en état qu'à six de les évaluer, d'en reconnoître les beautés*, &c.

Il paroît que notre raisonnement a fait quelqu'impression, puisque le Critique, pour en éluder la force, s'est jetté dans un autre embarras. Cet Ecrivain prête au public une opi-

(*a*) La *Grammaire* est une science qui contient les Régles que l'on doit suivre pour parler une langue ou pour l'écrire correctement.

nion où très-certainement ce même public n'eſt pas. La plûpart de ceux qui font étudier leurs enfans ſont dans une très-grande perſuaſion que l'étude du Latin eſt un puiſſant moyen de former leur eſprit. Citons M. l'Abbé Deſfontaines (*a*). A l'occaſion de ce même Diſcours il nous décrit les effets de l'étude d'Homere, de Virgile, d'Horace, d'Ovide; qu'*y a-t'il de plus propre à former le jugement, à élever l'eſprit, à orner la mémoire, à échauffer l'imagination, à lui apprendre à inventer, à créer, à conſtruire ſes penſées, à leur donner du corps; & enfin à peindre toutes les idées avec des traits de feu & de lumiere.*

Il eſt évident que cette énumération *Rhéthoricienne* (*b*) ſuppoſe que les enfans ou les jeunes gens ſont capables de reconnoître les beautés des Auteurs que l'on met entre leurs mains. Car comment former ſon jugement ſur ce que l'on n'entendroit pas ?

S'il n'y avoit dans la Cenſure de l'anonime qu'une erreur de fait; ce que nous venons de dire ſuffiroit pour être à portée de juger que les idées du public, ſur la matiére dont il s'agit, ne ſont pas tout-à-fait con-

(*a*) Obſervations ſur les Ecrits modernes, Lettre XD. pag. 231.

(*b*) *Enumération Rhéthoricienne.* C'eſt une énumération où l'on néglige les raiſons pour ſe livrer à la pompe des mots.

formes à celles de l'anonime ; mais il attribue au public une idée bien plus étrange : répétons ses paroles, *on ne met les Auteurs Latins entre les mains de l'enfance, ni même entre celles de la jeunesse que pour les former dans la belle latinité.*

Les mots n'ont été établis que pour être le caractére des pensées ; ces signes ne tirent leur beauté & leur élégance que de la grandeur & de l'harmonie des idées : une belle latinité est toujours l'image d'une vérité frappante ou d'un sentiment exquis (*a*). L'Anonime nous accorde que les jeunes gens ne sont pas en état de reconnoître les beautés des excellens Auteurs, & il prétend néanmoins que la lecture de ces grands modéles les forme dans la belle latinité ; nous lui serions bien obligés de nous faire comprendre ce que c'est qu'une belle latinité vuide de sens.

Feroit-il consister tout le talent des en-

(*a*) Ceux qui m'opposeroient que l'on parle très-bien à la Cour, & que l'on n'y pense pourtant pas mieux qu'ailleurs, n'auroient sur moi qu'un avantage apparent. Ce n'est pas parce que les Auteurs Latins sont de beaux parleurs, qu'on les met entre les mains de la jeunesse : ils doivent le privilege dont ils jouissent à la finesse & à la solidité de leurs idées. Nous ne manquons pas en France d'Auteurs qui écrivent avec pureté ; mais chez nos descendans cette qualité ne sera pas la mesure de l'estime que l'on doit aux Ecrivains des siécles passés, Amiot, Montagne, Corneille & Moliere seront toujours de mode. Les tours prétendus surannés de ces grands hommes seront consacrés par le génie qui les échauffe.

fans dans une grande mémoire ? Il femble qu'il ne tienne aucun compte de leur difpofition à raifonner fur les objets ; au moins c'eft ce que l'on peut inférer de fes paroles : *M. de la Chapelle affure que l'expérience l'a convaincu de l'aptitude des enfans à l'Etude des Mathématiques : je le crois ; mais cette fcience a cela de commun avec les autres fciences dont on voudra leur donner des principes, dès que l'on trouvera le moyen de les mettre à leur portée.*

Cela eft vrai, s'il ne s'agit que de mémoire ils peuvent tout apprendre indifféremment ; mais fi l'on veut parler à leur raifon naiffante, pour fe faire entendre à travers les enveloppes où elle eft encore, nous croyons impoffible de mettre à fon niveau, par exemple les principes d'une Grammaire latine dont on ne laiffe pas de furcharger leur mémoire, dès qu'ils fçavent leurs premieres lettres.

Avant que d'entamer la démonftration de cette vérité, il faut convenir que l'on n'entend point par principes d'une fcience les commencemens de cette fcience ; les vrais principes ce font les premieres idées, les idées fimples fur lefquelles on établit toute une doctrine. On nous accordera encore de plein droit qu'afin d'appercevoir les principes d'une fcience, il eft néceffaire de fentir la force des mots qui les expriment, c'eft-à-dire.

qu'un mot qui ne fait pas naître dans l'ame l'idée qui lui est attachée, ou ne fait rien appercevoir, ou nous plonge dans l'erreur.

Les premiers mots que la Grammaire offre aux enfans leur sont totalement inintelligibles, ils le sont même très-souvent aux hommes faits; en effet ces mots expriment des perceptions de la plus fine Métaphysique *(a)*. *Il y a deux genres*, leur dit-on, *le Masculin & le Féminin*; employez quelle machine vous voudrez, vous ne ferez jamais concevoir à un enfant de six ans ce que c'est qu'un *genre* : le *genre* n'est point un être existant dans la nature; vous ne sçauriez le lui montrer. Ce mot suppose une opération de l'ame trop fine & trop compliquée. Si vous lui dites, *il y a deux sexes, le Masculin & le Féminin.* L'enfant ne sçait ce que c'est qu'un sexe; vous continuez pourtant. *Le genre Masculin est celui qui appartient au sexe mâle, le Féminin appartient au sexe femelle.* Heureusement pour le Grammairien tout cela n'est qu'un son qui ne va pas plus loin que l'oreille de l'enfant; s'il avoit assez d'expérience pour y comprendre quelque chose, il embarrasseroit fort le Donneur d'ex-

(a) La *Métaphysique* est une science dans laquelle l'esprit s'éleve au-dessus des Etres corporels, & s'attache à la contemplation des choses qui ne tombent sous aucun de nos sens.

plication; une table, lui diroit il, est du genre Féminin, elle n'est pourtant d'aucun sexe (*a*).

Les mots de la Grammaire ne présentent donc aux enfans aucune idée distincte; ils ne pourroient les évaluer qu'au moyen d'un très-grand nombre d'idées accessoires qui sont nécessairement l'ouvrage du temps & de l'expérience.

Il n'en est pas ainsi des principes de la Géométrie : l'idée d'une chose en précéde toujours le nom. Voyez-vous, dit-on, à un enfant le trait A B, A————B, c'est *une ligne droite* : son ame est pénétrée de cette idée comme la mienne; il en remarque les extrémités A, B tout aussi-bien que moi; il ne lui faut que des yeux.

Tirons encore sous ses yeux la ligne droite CA qui rencontre la ligne A B au point A, & demandons-lui s'il n'apperçoit pas au point A une espece de coin, une sorte d'encognure : il n'est pas embarrassé un seul instant; je lui dis que cela s'appelle

B
A
C

(*a*) La constitution des langues offre une prodigieuse bisarrerie; on ne sçauroit les en défendre qu'en s'appuyant sur cette espece de proverbe si connu, *l'usage l'a voulu ainsi*; ce qui signifie en termes plus clairs, *les langues sont l'ouvrage du caprice bien plus que de la raison.*

un *angle*, la pointe A en eſt le *ſommet*, les lignes droites C A, A B en ſont les *côtés*; il entend tout. Je continue ſur ce plan d'approviſionner ſon eſprit de toutes les idées élémentaires qui doivent ſervir à la conſtruction du corps de doctrine que je me ſuis propoſé.

Conçoit-on bien préſentement la prodigieuſe différence qu'il y a entre les principes abſtraits & Métaphyſiques de la Grammaire, & ceux de la Géométrie qui ſe font appercevoir dès la premiere fois que les yeux s'ouvrent à la lumiere ?

Ce n'eſt pas tout, quand on aura entendu nos raiſons, nous ſommes perſuadés que l'on ne nous accuſera pas de témérité d'avancer, ce qui eſt le but principal de ce Diſcours, que la ſcience des Mathématiques eſt la ſeule où les enfans puiſſent mettre continuellement en exercice la faculté naturelle qu'ils ont de raiſonner.

L'uſage eſt d'appliquer les enfans à la Grammaire, à la Fable (*a*), à l'Hiſtoire de quelques faits, à quelques traits de Géographie (*b*) &

(*a*) *La Fable* eſt l'Hiſtoire des opinions que les Payens avoient de leurs Divinités. La *Fable* eſt auſſi une fiction où l'on introduit pluſieurs animaux qui s'entretiennent. On leur fait dire des vérités qui peuvent ſervir à la correction des mœurs.

(*b*) *Géographie*, ſcience où l'on apprend le nom & la ſituation des Royaumes, des Provinces, des Villes, des Mers,

de Chronologie (*a*). Il a été amplement démontré que les enfans n'entendent rien à la Grammaire. Les Dieux chimériques de la Fable, où ses animaux qui ne le sont pas moins, sont plutôt des obstacles que des moyens de perfectionner leur raison, & il ne faut que des yeux & de la mémoire pour l'Histoire & la Chronologie (*b*).

*T*outes ces sciences ne fournissent donc aucun aliment au germe qui enveloppe la raison des enfans. La science des Mathématiques est la seule dont les principes soient bien palpables. Ce sont les idées des corps qu'ils ont toujours entre leurs mains. Les premieres conséquences s'y tirent, pour ainsi dire, à l'œil. Ainsi la raison des enfans, sollicitée par des objets dont elle se trouve, presque en naissant, la maîtresse, prend plaisir à faire l'essai de sa puissance; mais en faire l'essai c'est l'augmenter.

Nous osons défier l'Anonime de citer une autre science qui puisse produire les mêmes moyens d'exercer la raison; car d'alléguer, comme il le fait, sans aucune preuve que *les Mathématiques ont cela de commun avec toutes les autres sciences dont on voudra leur donner*

des Rivieres, &c. que l'on rencontre sur la surface de la Terre.

(*a*) *Chronologie*, on entend par ce mot la connoissance des années & des jours où sont arrivés des évenemens remarquables.

(*b*) C'est-à-dire pour cette portion d'Histoire & de Chronologie qui peut être à la portée des enfans.

des principes, dès qu'on trouvera le moyen de les mettre à leur portée ; cela n'eſt pas recevable. Dans l'empire de la lumiere naturelle la foi n'eſt dûë qu'aux raiſons.

Néanmoins nous ſommes perſuadés que c'eſt par une pure inadvertance que l'Anonime a donné, ſur la fin de ſa Critique, dans le Sophiſme (*a*), que l'on appelle *ignorantia elenchi*; ignorance de ce qui eſt en queſtion.

Afin de réduire au ſilence quelques prétendus beaux eſprits qui ſe perſuadent que l'imagination conſiſte à façonner de petites phraſes (*b*) qu'ils ont bien de la peine à terminer par une chetive penſée; nous avons bien voulu faire mention d'une vieille objection qui n'a jamais été faite que par ceux qui n'entendent rien aux Mathématiques, apparemment pour ſe conſoler de leur ignorance; ils diſent donc que les Mathématiques éteignent l'imagination.

Nous n'avons produit que quelques traits de l'Hiſtoire ancienne & moderne, & l'objection eſt tombée tout à coup; mais l'Anonime a cru la relever en nous diſant : *il prouvera ſans doute que tous ces grands hommes (les Pithagores, les Platons, les Paſchals, les*

(*a*) Un *Sophiſme* eſt un raiſonnement fondé ſur un faux principe. On fait un Sophiſme quand on change, que l'on détourne, ou que l'on ne prend pas l'état de la queſtion.

(*b*) *Phraſe.* C'eſt un tour ou une maniére de s'exprimer. Les Ecrivains ſuperficiels & les Diſcoureurs qui courent après le bel Eſprit, ſont amoureux des phraſes bien cadencées.

Mallebranches, les Arnaults, les Nicoles) avoient commencé l'Etude des Mathématiques à six ans (*a*)*, & cela est essentiel pour son opinion : car si cette science peut éteindre l'imagination, c'est assurément dans un âge tendre où l'imagination* (*b*) *n'est pas encore formée.*

Développons le Sophisme : une bonne réponse est sans doute celle qui suit l'esprit de la demande ou de l'objection. Ceux qui nous ont opposé avant & après l'édition de ce Discours que les Mathématiques étoient tout à fait propres à éteindre l'imagination, ne pensoient guéres à celle des enfans : il auroit fallu pour cela qu'ils eussent soupçonné que ces sciences n'étoient pas au-dessus de leur portée ; ce qui ne leur est jamais tombé dans l'esprit. Ainsi quand nous avons dirigé notre réponse à ceux qui prétendent que les Mathématiques éteignent l'imagination ; nous n'avons pas dû l'étendre à celle des enfans.

C'est aux hommes faits à qui M. l'Abbé Desf. en veut, lorsqu'il dit pag. 235. *la*

(*a*) On trouve la même inadvertance dans les Observations sur les écrits mod. Lettre citée pag. 235. *Ces grands hommes*, dit l'Auteur, *étoient-ils Géométres à six ans* ? Il y a bien de la différence entre commencer l'étude de la Géométrie, & être Géométre. Est-on Grammairien à six ans, parce que dès cet âge l'on étudie la Grammaire.

(*b*) Rien n'est plus propre à former l'imagination que ce qui parle continuellement aux sens : telles sont les figures de la Géométrie élémentaire. La Grammaire qui n'offre que des mots vuides de sens, ou des idées Métaphysiques, doit en être le tombeau.

Géométrie épuise tous les efforts d'un esprit ordinaire & le rend incapable de toute autre chose : cela est certain, continue-t'il, par l'expérience, puisque la plûpart des Géométres n'ont ni invention, ni agrément, ni goût, que leur imagination est stérile & pésante, leur jugement même fort médiocre (*a*).

Que l'Anonime nous permette de dire quelques mots à M. l'Abbé Desfontaines, Descartes & Leibnits, créateurs chacun de leur côté d'une Géométrie très-sublime, étoient-ils *sans imagination* ? & pour parler de

(*a*) Nous sommes véritablement fâchés de voir qu'un Ecrivain, tel que M. l'Abbé Desfontaines, dont la plume correcte travaille avec succès à maintenir la pureté de notre langue, cherche pourtant à donner de l'éloignement pour une étude à laquelle on ne sçauroit trop encourager.

Un des plus beaux esprits de notre siècle, je crois même que l'on peut dire (sans risquer l'honneur de son jugement) un des plus beaux esprits de tous les siècles, M. de Voltaire demande *quelle opinion l'on auroit d'un Avocat Général qui se répandroit en invectives contre des Parties au lieu d'instruire leur Procès; la dignité de Journaliste, ajoute-t'il, n'est pas tout à fait* si *respectable, mais les fonctions en sont à peu près les mêmes*.

Effectivement, dit un autre Ecrivain très-accrédité, *on devroit prendre garde en écrivant à ne pas satisfaire ses passions particulieres. Un Auteur a des démélés avec un autre Auteur; mais le Lecteur n'en a pas. Dans l'Analise d'un Discours, il s'attend qu'on va lui en exposer l'esprit, l'Architecture, les principes, l'enchaînement des conséquences, & non pas que l'on prétende d'établir des préjugés contre.* Ce seroit corrompre ceux que l'on doit instruire.

M. Bayle se plaint quelque part dans ses Lettres de ne s'être pas assez appliqué aux Mathématiques. Ceux à qui il ne manque presque rien sont les premiers à reconnoître qu'il leur manque beaucoup.

Hobbes, Philosophe Anglois, l'homme du monde qui pou-

ceux que M. l'Abbé Desfontaines ne connoît pas sans doute assez.

Les Fontenelles, les Terrassons, les Mairans, les Fouchis, les Buffons, les Maupertuis, les de Gua, les d'Alembert, les de Gamaches, les Clairaut, les le Monnier, les Reaumurs, les Fontaines, les Montigni, les le Camus, les Bouguer, les Nicole, les la Condamine, les Cassini, &c. (il faudroit nommer toute l'Académie des Sciences) sont-ce des hommes *sans invention & d'un jugement médiocre*, eux qui ont enlevé l'approbation générale de leur siécle, & par avance celle des siécles à venir ?

Nous ne croyons pas non plus que l'on ose attribuer au R. P. Castel une *imagination stérile & pésante* : il nous sera permis de douter qu'aucun de nos beaux Discoureurs ait prodigué les images avec autant de profusion que ce fameux Ecrivain.

Quant à l'objection de l'imagination des enfans à laquelle on paroît prendre un si grand intérêt, mon premier dessein étoit de n'y avoir aucun égard ; je me fondois sur

voit le plus légitimement se passer de Mathématiques, avoit plus de trente ans quand il réfléchit que ces connoissances lui manquoient : il fit beaucoup mieux que de les mépriser ; il les étudia.

C'est par la Physique & par les Mathématiques que MM. de Fontenelle & de Voltaire ont rendu la nature & tous les Arts tributaires de leur esprit, & que l'Angleterre s'est élevée à la dignité suprême d'occuper la premiere place dans l'Empire des Sciences profondes.

cette idée que l'on ne devoit considérer une objection que par les raisons qui l'autorisoient, & comme mes Critiques n'en ont apporté aucune, qu'ils me paroissent au contraire être dans le cas de ceux qui auroient seulement entendu dire que *les Mathématiques pourroient bien éteindre l'imagination*, je pensois qu'il étoit plus convenable à moi d'attendre leurs propres raisons que de leur en supposer de mon chef qui courûssent les risques de n'être pas avouées.

Néanmoins je n'ai pû résister aux avis de quelques personnes dont j'aime à reconnoître la supériorité des lumieres : elles m'ont fait observer que pour la multitude une objection étoit une raison, & que l'on étoit censé n'avoir pas de quoi répondre, lorsque l'on ne répondoit pas.

Ainsi en attendant que de bonnes Critiques (*a*) m'obligent à discuter à fonds cette question; j'y vais répondre en peu de mots.

1°. On ne conseille point de ne faire étudier aux enfans que de la Géométrie. Nous avons dit nous-mêmes plus d'une fois qu'il

(*a*) On ne doit attendre de bonnes critiques que de ceux qui auront étudié les Mathématiques & la nature de l'esprit humain en Philosophes, c'est-à-dire, en remontant toujours aux premieres causes. Demander qu'au moins l'on soit instruit sur le fonds de la matiére que l'on traite? il me semble que ce n'est pas trop exiger; car il n'y a rien au monde de si désagréable, & qui éternise plus les discussions sans aucun fruit, que d'être obligé de répondre à des gens dont toutes les propositions sont des pétitions de principe.

y avoit bien autre chose à apprendre ; mais que les Mathématiques devoient entrer dans la premiere éducation à cause qu'elles sont fort propres à donner de la consistance à nos idées par la méthode que l'on y suit constament de ne parler que de ce que l'on conçoit : que l'on apprenoit en Géométrie la plus excellente de toutes les Dialectiques (*a*) ; que c'étoit la Dialectique même en œuvre ; car la meilleure voye d'apprendre à raisonner est de raisonner toujours exactement, comme l'on fait en Géométrie. De bons Tableaux valent beaucoup mieux qu'un Traité de peinture : une action juste est fort au-dessus d'une maxime de morale ; ainsi celui qui raisonne bien est très-supérieur à celui qui sçait bien raisonner.

Si l'on appliquoit les enfans uniquement à la Geométrie, on ne nie point qu'il ne puisse arriver que leur esprit resserré dans un certain cercle d'idées, ne s'y renfermât, & qu'il n'acquit une sorte d'infléxibilité qui l'empêchât de se tourner vers d'autres objets ; comme on l'éprouve à l'égard de ceux qui, s'étant toujours amusés de Littérature commune, de petits Vers, d'Historiettes, de jolies bagatelles, sont devenus incapables d'attention, & de rien produire par eux-mêmes.

(*a*) *Dialectique*. C'est une science qui enseigne à raisonner avec justesse.

2°. Mais il n'y a point d'homme qui ne ſoit né avec une portion d'imagination : l'art & l'étude étendent nos facultés ; elles ne les donnent pas. Entre les différentes ſortes d'imaginations que la nature a diſtribuées aux eſprits divers, qui peuvent nous intéreſſer, il y en a de fortes, il y en a de belles, il y en a de médiocres.

Comme nous ne voyons que les dehors de la nature, les fortes imaginations en pénétrent l'intérieur ; elles aſſiſtent, pour ainſi dire, au jeu des reſſorts, dont les imaginations inférieures n'apperçoivent que l'eflet.

Une belle imagination ſçait parer un ſeul objet des beautés éparſes que la nature a répanduës ça & là ſur la multitude infinie de ſes productions ; frappée des moindres diſſonances, elle ſubſtituë tout ce qui peut entretenir ou faire revivre l'harmonie ; elle écarte ou ſupprime tout ce qui pourroit l'altérer.

Pour les imaginations médiocres, elles ſont vives ſans chaleur ; comme elles n'ont point de tenue, elles ne font appercevoir que des étincelles dont le feu s'éteint preſque en naiſſant ; ce ſont des projets plutôt que des productions : enfin ces imaginations ſont faites pour imiter, incapables de produire.

Qu'arrivera-t'il donc lorſque l'éducation offrira à notre ame différens objets ? Chaque imagination

imagination s'emparera de ceux qui seront les plus conformes à sa nature après avoir un peu essayé de tous les autres qui n'y ont pas tant de rapport.

Il n'y aura que l'imagination médiocre qui pourra être subjuguée; ce n'est pas un grand mal. Les Mathématiques rendroient assurément un très-bon service à la Littérature si elles substituoient à une imagination foible & stérile, un jugement exact & précis.

On ne voit donc pas qu'elles sont les risques que l'esprit peut courir dans l'Etude des Mathématiques; elles sont l'élement des fortes imaginations & le tombeau des médiocres; les belles imaginations pourront s'en passer : nous croyons pourtant que M. de Voltaire n'en auroit pas moins fait la *Henriade* quand il auroit commencé les Elemens d'Euclide à six ans.

Je sçais bien qu'il y a des *machines à Géométrie* comme il y a *des échos d'esprit* & des *cahos d'érudition.* Ces sortes de gens sçavent une démonstration par cœur : mais ils ne se doutent pas du génie qui a présidé à la découverte, ou de celui qui a disposé & uni les différentes parties de la démonstration. On n'est pas plus Géométre avec ces qualités machinales, qu'avec une tête remplie de faits, on ne mérite le titre d'Historien ou de Géographe.

Il me semble que si l'on vouloit établir quelque comparaison entre les différens ordres d'esprits qui composent la République des Lettres, il faudroit se demander, Descartes vaut-il Corneille ? Quelle distance y a-t'il de Leibnits à Racine ? Rousseau a-t'il plus de chaleur & d'invention que Mallebranche ? Bossuet est-il plus élevé que Paschal ? Mais à qui comparer la sage imagination de M. de Fontenelle, *le phénix des beaux esprits de ce siécle* (*a*)...

Ceux qui auront lû la Critique que l'Anonime a faite de notre Discours nous rendront sans doute la justice que nous n'avons affoibli ni dissimulé aucun des points de sa Critique. On en peut même assez bien juger par la citation sincere & très-fidéle que nous avons faite de ses paroles qui nous ont imposé la nécessité de traiter de nouveau toute la question. Nous le prions d'être bien persuadé que nous ne lui en sçavons point mauvais gré. Il nous a exposé simplement son opinion ; elle est contraire à la nôtre, nous devions nous y attendre. On ne détruit pas du premier coup l'opinion de la multitude : c'est déja beaucoup pour nous d'avoir réuni l'approbation de quelques sages. Le tems &

(*a*) Les Etrangers ont accordé à M. de Fontenelle ce titre si flatteur. Voyez les Essais de Physique par *M.* Muschenbrock.

la nécessité peut-être, acheveront le reste.

Comme le sentiment de l'Anonime & de M. Desfontaines est à peu près conforme à l'opinion commune qui trouve toujours un usage assez bon par la seule raison qu'il est établi, nous avons pris un très-grand soin d'approfondir la Réponse que nous venons de faire à ces deux Critiques : par là notre objet s'est développé. L'ombre des objections n'a fait que rendre sa lumiere plus vive.

Cependant on nous a fait une objection à laquelle nous ne sçaurions répondre qu'en convenant de sa solidité. On nous a dit, il n'est pas douteux, pour peu que l'on y pense, que la Géométrie & l'Arithmétique, qui parlent presque toujours aux yeux, ne soient très-propres à exercer la raison des enfans; mais il ne faut pas attendre cet avantage de la Géométrie d'Euclide, ni même de celle de ses Commentateurs : ces derniers ont rendu la Géométrie plus facile, sans la rendre plus familiere.

Rien de mieux pensé. On ne sçauroit croire combien un stile ou un discours familier à de puissance pour s'insinuer dans l'ame. J'ai vu bien des gens de bon sens tout-à-fait humiliés d'une conversation à laquelle ils n'avoient rien entendu: ils croyoient naïvement que la matiére étoit trop profonde ou trop élevée pour eux : on la leur explique

avec des termes simples, ordinaires, & ils sont tout étonnés de leur intelligence.

Cette considération n'a pas été infructueuse : une Géométrie faite exprès pour les enfans seroit, pour ainsi dire, le complément de notre systême : en voici une que je présente au public. Il est naturel que celui qui expose un dessein se charge de l'éxécution. L'Auteur d'une idée doit avoir plus de vuës sur son objet que ceux qui n'ont pas fait profession d'y penser. Je la donne sous le nom *d'institutions de Géométrie*, parce que cet ouvrage contient principalement l'art d'enseigner la Géométrie aux enfans : nous avons montré dans des notes particulieres les routes qui ménent à leur esprit.

Pour les inviter à faire usage de leur raison, je m'entretiens avec eux sur les premiers objets de leurs connoissances, j'essaye de leur faire sentir la commodité, le besoin ou même la curiosité qu'il y auroit de sçavoir éxécuter certaines opérations; quand ils y sont bien préparés, je leur parle de la proposition ou du problême (*a*) qui enseigne la maniére de se tirer d'embarras.

Cet artifice si simple sauve à une proposition son air étranger. Elle est mieux reçuë,

(*a*) Voyez n°. 42. de la Géomet. ce que l'on entend par *Proposition*, & n°. 3. Arithm. quelle idée on doit se faire de ce que l'on appelle *Problême*.

parce que l'on en connoît la néceſſité : je tâche de traiter la Géométrie avec une ſimplicité de diſcours, & un ordre d'idées qui ne laiſſent que le plaiſir de l'attention ſans en faire ſentir le travail. Il en eſt en quelque façon des ſciences comme des maniéres; mettez-y du faſte, elles impoſent & elles éloignent; mais ſi vous deſcendez pour vous communiquer aux plus petits; vous les trouverez beaucoup plus grands que vous n'aviez cru.

Nous avons ménagé avec le plus grand ſcrupule leurs foibles facultés. Lorſqu'une démonſtration nous a paru trop longue; d'une nous en avons fait quatre, & comme il eſt difficile de ſe garantir de la fatigue; quand on cherche à ſe convaincre d'une vérité; je les livre tout à coup aux agréables éxercices de la pratique : ainſi une vérité qui aura couté cinq ou ſix minutes d'attention, fournira deux ou trois heures d'amuſement.

On ſupplie donc ceux qui examineront cet ouvrage de le juger, non pas ſur ce qu'ils auroient pû faire eux-mêmes, mais ſuivant l'eſprit dans lequel il a été compoſé.

Plan général de cet Ouvrage.

1°. On s'eſt propoſé de rendre la Géomé-

trie élémentaire, accessible même aux enfans. Il a fallu par conséquent se frayer de nouvelles routes. Pour cela on a fait valoir le témoignage des sens autant qu'on l'a pû dans toutes les occasions où il a paru évidemment qu'il étoit légitime. Lorsque l'on a pû substituer une vérité de sentiment en la place d'une démonstration par ligne, on a préféré cette voye comme la plus lumineuse & la moins rebutante, sans négliger les démonstrations rigoureuses, afin de contenter tout le monde.

2°. On a établi un systême de propositions tel que l'on pût résoudre par son moyen les problêmes les plus utiles, les plus curieux, tous ceux enfin qui pouvoient donner le plus de goût pour la Géométrie. On a tiré ces problêmes de l'éxécution des Arts les plus communs & les plus familiers sur lesquels il n'est besoin que d'ouvrir les yeux.

3°. Comme il n'y a rien au monde si commode, que de faire servir une vérité, dont on vient d'être convaincu, à la démonstration de celle qui la suit immédiatement; que celui qui étudie une vingtiéme proposition a souvent oublié la quatriéme ou la huitiéme; toutes les propositions des trois premiers livres ont été déduites immédiatement les unes des autres (*a*). Cela n'a été éxécuté par

[*a*] Comme l'on n'a pas besoin de toutes les propositions

qui que ce soit, ancien ni moderne, on ne l'a pas même cru possible. Aussi chez tous les Auteurs qui ont traité de la Géométrie la proposition qu'ils appellent la huitiéme, pourroit être la vingtiéme dans leurs livres sans aucun inconvénient; car il est fort ordinaire à ces Auteurs de n'avoir aucun besoin de la douziéme proposition quand ils démontrent la treiziéme. L'ordre est donc renversé. Les propositions ne sont point engendrées immédiatement les unes des autres; c'est un tas de vérités, & non pas un édifice, comme nous le disons ailleurs.

4°. Cette génération de vérités déduites immédiatement les unes des autres nous a procuré l'avantage très-considérable d'avoir abrégé la Géométrie sans en retrancher rien de nécessaire: où les autres employent vingt propositions, nous n'en mettons pas quatre. Voilà une grande œconomie de tems & une diminution de travail toujours très-estimable; car on a bien autre chose à apprendre que de la Géométrie.

5°. On sentira l'importance de tout ce que je dis quand on verra que je démontre tous

des trois premiers livres pour passer au quatriéme, c'est-à-dire, à la mesure des solides; on ne s'est pas attaché à lier immédiatement ce livre aux précédens, mais toutes les propositions de ce quatriéme livre ont été déduites immédiatement les unes des autres, suivant la loi que nous nous sommes imposée.

les problêmes de la Trigonométrie [a] sans avoir besoin du calcul des Sinus [b] ni même des Triangles proportionnels. Le moyen que j'employe paroîtra si simple qu'en moins de huit jours de Géométrie on comprendra comment l'on peut déterminer les distances inaccessibles dans tous les cas possibles. M'étant proposé de me mettre à la portée des enfans, ce moyen m'est tombé dans l'esprit. On doit juger de sa simplicité par mon dessein: J'arrive à la résolution de ces problêmes (dont la Théorie est assez difficile par les voyes ordinaires) presque dès l'entrée de la Géométrie. Douze propositions m'y conduisent; encore, en chemin faisant, ai-je résolu un grand nombre de problêmes que l'on ne trouve point ailleurs. Après cela on ne doit pas être surpris de m'entendre dire que ma Géométrie, plus étenduë que beaucoup d'autres, ne renferme pourtant pas quarante propositions à la rigueur.

6°. La démonstration d'un grand nombre de problêmes étant fondée sur la vérité des propositions *converses* [c], je ne laisse passer

[a] La *Trigonométrie* enseigne l'art de trouver les longueurs des distances inaccessibles.

[b] *Sinus, triangles proportionels*, ce sont des moyens que la Trigonométrie employe pour déterminer les distances inaccessibles.

[c] Consultez le n°. 44. Géomet. vous verrez ce que c'est qu'une proposition *converse*.

aucune propoſition ſans en démontrer la converſe, ſi elle en a une, & qu'elle ſoit vraye : ainſi j'examine les cas où les propoſitions ont des converſes ; ceux où elles n'en ont pas, je fais voir les converſes qui ſont fauſſes : comment on doit s'y prendre pour trouver la converſe d'une propoſition. Toutes choſes que perſonne n'avoit obſervées juſqu'à préſent ; dont l'examen eſt néanmoins abſolument néceſſaire pour éviter tout paralogiſme.

7°. Enfin l'Ouvrage eſt accompagné de notes ſur les développemens de l'eſprit humain, ſur la maniere de ſe conduire principalement à l'égard des enfans, afin qu'ils reçoivent des idées de la maniere la plus proportionnée à leurs foibles facultés.

Si je remplis toutes ces vuës, il me ſemble que cet Ouvrage ſe fera diſtinguer par un aſſez grand nombre de caractéres qui méritent d'être conſidérés. Je le promets. Mes Cenſeurs décideront ſi je tiens parole.

Je diviſe cet Ouvrage en deux parties. La premiere ſous le nom *d'Inſtitutions*, renferme deux Livres ; & l'autre que j'appelle *Géométrie de l'Adoleſcence*, en contient auſſi deux ; le premier de ces Livres traite des propriétés les plus ſimples qui réſultent de la combinaiſon de lignes droites. La meſure des terrains eſt expliquée dans le ſecond. On voit au troiſiéme les proportions des nom-

bres & celles des lignes ; & le quatriéme renferme la mesure des solides. Le tout y est précédé d'un Traité d'Arithmétique raisonnée & démontrée sous des points de vuë nouveaux. La Régle de trois, de quelque nature qu'elle soit, y est démontrée beaucoup plus clairement que par les proportions ; on y a joint un petit Traité d'Algebre où l'on parle de l'extraction des racines quarrées & cubiques, comme aussi de l'art des équations. On retire des avantages si singuliers de cette admirable invention de l'esprit humain, que l'on doit au moins sçavoir ce que c'est. On sera bien payé du peû que cette connoissance pourra couter.



Explication des Signes, des Citations & des Abbréviations, dont on fait usage dans ces Institutions.

$+$	plus.
$-$	moins.
$\times$	multiplié par.
$\times$	divisé par.
$\frac{a}{b}$ ou $\frac{3}{4}$	a divisé par b, ou 3 divisé par 4.
$>$	plus grand.
$<$	plus petit.
$=$	égale ou vaut.
$::$	comme.
$:$	comme en certains cas.
$\div\div$	signifie comme dans les cas où il faudroit le répéter plusieurs fois.
$\sqrt{}$	racine de.
$\sqrt{\sqrt{}}$	racine de racine.
$l\,64$	logarithme du nombre 64.

$2\ \overline{-\ 1 \times \tfrac{1}{2}}$ fait voir que l'on ne doit multiplier l'un par l'autre que les quantités ou les chiffres qui sont directement sous la ligne supérieure; ainsi -1 doit être multiplié par $\frac{1}{2}$; mais le nombre 2 ne doit pas l'être, à cause qu'il n'est pas sous la ligne supérieure.

(const.)	par la construction.
(probl.)	par le problême.
(supp.)	par la supposition.
(prop.)	par la proposition.

(n°. 15. Arith.) par le nombre 15 de l'Arithmétique.
(n°. 20. Alg.) par le nombre 20 de l'Algébre.
(par la Dém.) par la Démonstration.

Les nombres, que l'on rencontre ainsi (n°. 38.) entre deux parenthèses, signifient que l'on doit recourir à l'article marqué par ce nombre, où l'on trouvera les fondemens ou la preuve de ce que l'on avance. Quand le nombre est cité simplement comme (n°. 45.), il signifie qu'il faut consulter le nombre côté 45 dans la matiére même qu'on lit ou que l'on étudie ; si l'on en est à la Géométrie, cela veut dire, nombre 45 de la Géométrie ; si c'est en Algébre, cela signifie nombre 45 de l'Algébre, &c.

J'ai oublié d'avertir dans le Discours préliminaire, 1°. qu'après avoir montré aux enfans les quatre premiéres opérations de l'Arithmétique, & les quatre premiéres régles de l'Algébre sur les Monômes, on doit les faire passer tout de suite au premier Livre de la Géométrie, dont les figures sont plus propres que les chiffres à fixer leur attention & à occuper leurs mains. Dans la suite on leur fera approfondir le calcul, sans lequel il ne faut pas espérer de faire aucuns progrès dans les Mathématiques.

2°. Que l'on ne soit pas surpris de m'entendre parler de quelques personnes, comme éxistantes, qui sont mortes pendant que cet Ouvrage s'imprimoit.

3°. Que j'ai détruit les raisons sur lesquelles on fonde la méthode des indivisibles, méthode dont presque tous les Auteurs modernes ont fait usage, même les plus accrédités ; & qu'ainsi l'on doit avoir recours à la méthode des Anciens, appellée méthode d'exhaustion, si l'on veut que les Elémens de Géométrie soient démontrés.

4°. Que j'ai traité de la Trigonométrie par les

Sinus d'une maniére qui m'eſt particuliére. J'y ai fait remarquer que l'on pouvoit en réſoudre tous les problêmes par une propoſition unique.

5°. A la fin de la notte (*a*) pag. 180. & 181. du ſecond Tome où j'ai fait obſerver que le quarré de la ſomme de deux grandeurs n'étoit pas égal à la ſomme des quarrés de chaque grandeur, il faut ajouter ... par conſéquent de ce que le quarré de l'hipothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés des deux côtés, on auroit tort de conclure que l'hipothénuſe devroit être égale à la ſomme des côtés ; propoſition, qui ſeroit d'ailleurs contraire aux premiers principes de la Géométrie, par leſquels il eſt évident qu'une ligne droite eſt plus courte qu'une ligne courbe ou anguleuſe, qui a les mêmes extrémités.







DE L'ARITHMETIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Origine de cette Science. Ses principales opérations.



'ARITHMETIQUE, comme toutes les autres Sciences, est la fille du besoin & de la curiosité.

Sur le pied où sont les affaires humaines un homme ne sçauroit se passer de traiter avec les autres hommes. Les sociétés qu'ils ont formées entre eux où auxquelles ils se sont trouvés assujettis, leur ont suscité une si prodigieuse quantité de besoins que les facultés naturelles de chaque homme ne sçauroient suffir à son bien être. Il faut qu'il ait recours aux autres hommes, & que les autres hommes recourent à lui. C'est-là l'origine des échanges.

Ces échanges, qui se font à chaque instant, demandent une sorte de proportion que l'esprit à la vérité découvre assez facilement dans les cas simples,

mais à laquelle les plus grands efforts de mémoire ne suffisent pas, quand les combinaisons ont été multipliées à un certain point.

On a donc cherché lesmoyens de simplifier les cas les plus compliqués, & d'y employer le plus petit tems possible ; car l'œconomie du tems est un gain fort considérable.

Les recherches ont produit les découvertes. On a trouvé des Régles, suivant lesquelles, sans effort d'esprit, on peut résoudre ce que le commerce offre de plus compliqué.

On a travaillé ensuite à disposer ces Régles de maniere que les plus aisées servissent à l'intelligence des plus difficiles.

L'Arithmétique est donc une science où l'on apprend à combiner les nombres ou les quantités avec facilité ; & d'une maniere sure.

Il est aisé de comprendre que cette multitude de combinaisons auroit fait succomber les plus forts génies, & se seroit dérobée à la sagacité des plus subtils si l'on avoit attaché à chaque nombre ou à chaque combinaison de nombre un signe particulier qui l'eut représenté ; car l'esprit n'appercevant pas les limites des combinaisons, n'auroit jamais fini d'en imaginer les signes.

Si l'on doit suivre l'opinion commune, c'est aux Arabes que nous sommes redevables de la petite quantité de signes que l'on employe à représenter tous les nombres possibles ; ces signes s'appellent des *Chiffres* ; il n'y en a que dix.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	0.
un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf,	zero.

1. On est donc convenu que le chiffre 1 représenteroit une chose toute seule, que 2 exprimeroit le double de 1, & ainsi de suite jusqu'à 9 qui exprime neuf fois 1. Voilà la premiere valeur des

neuf chiffres. 8 tout seul ne vaut que huit ; mais étant combiné avec les autres ou avec le o, il peut exprimer une quantité bien plus considérable. Nous allons expliquer en quoi consiste cette admirable invention.

2. On a imaginé de donner une autre valeur à chaque chiffre suivant la place qu'il occuperoit avec les autres ou avec le zero répété autant de fois qu'il en seroit besoin. Il a été établi qu'un chiffre mis à la seconde place, en commençant à compter de droite à gauche, vaudroit dix fois plus qu'étant posé à la premiere place : ainsi pour exprimer un dix fois on écrit 10, ce qui signifie qu'à la premiere place il n'y a rien ; mais que le second chiffre 1 vaut dix fois 1 ou une dixaine. De même 20 signifie 2 fois dix ou vingt, 30, 3 fois dix ou trente, 40, 4 fois dix ou quarante, 50, 5 fois dix ou cinquante, 60 6 fois dix ou soixante, 70, 7 fois dix ou soixante & dix appellé quelquefois *septante*, 80, 8 fois dix ou quatre-vingt, 90, 9 fois dix ou quatre-vingt-dix que l'on nomme encore *nonante*.

Présentement entre 10 & 2 fois 10 ou vingt il y a neuf quantités qu'il faut exprimer qui sont dix & un ou onze, dix & deux ou douze, dix & trois ou treize, dix & quatre ou quatorze, dix & cinq ou quinze, dix & six ou seize, dix & sept ou dix-sept, dix & huit ou dix-huit, dix & neuf ou dix-neuf; vous écrirez donc 11 onze, 12 douze, 13 treize, 14 quatorze, 15 quinze, 16 seize, 17 dix-sept, 18 dix huit, 19 dix neuf.

Il y a les mêmes quantités à exprimer entre 2 fois dix & 3 fois dix, c'est-à-dire entre 20 & 30, entre 30 & 40, &c. Vous agirez donc de même que nous avons fait pour les quantités qui sont entre 10 & 20, & vous aurez l'expression des nombres depuis 1 jusqu'à 99 sans avoir besoin d'autres signes que les dix chiffres.

Pour continuer l'expression des nombres sans introduire de nouveaux caractéres, on est encore convenu qu'un chiffre à la troisiéme place vaudroit dix fois plus qu'à la seconde, & ainsi de suite en déterminant toujours qu'un chiffre mis à une place vaudroit dix fois plus qu'à la place qui le précede immédiatement en allant de la droite à la gauche. Si l'on veut donc exprimer dix dixaines qui sont 99 & 1, on écrira 100, c'est-à-dire 1 à la troisiéme place, que l'on appelle alors un cent ou dix dixaines.

Moyennant les deux valeurs de chiffres dont nous venons de parler, & qui sont de pure convention(*a*), on peut exprimer toutes les quantités imaginables.

Cette expression a lieu de deux maniéres, c'est ce que l'on va démontrer en donnant la résolution des deux Problêmes suivans après que nous aurons remarqué que dix unités valent une *dixaine* ou 10, dix dixaines valent un *cent* ou 100, dix cens valent un *mille* ou 1000, dix mille valent une *dixaine de milles* ou 10000, dix dixaines de milles valent *cent milles* ou 100000, dix cens milles valent un *million* ou 1000000, dix millions valent une *dixaine de millions* ou 10000000, dix dixaines de millions valent *cent millions* ou 100000000. Toute la suite de ces dénominations est exposée dans l'éxemple présent.

(*a*) Les gens peu accoutumés à imaginer ne sçauroient comment s'y prendre pour concevoir que l'on puisse, avec plus ou moins de chiffres que les Arabes, exprimer tous les nombres possibles. Nous sommes pourtant bien persuadés que la méthode ordinaire de compter doit toute sa considération beaucoup plus à la coutume qu'à la simplicité dont on prétend la revêtir. Qu'il nous soit permis d'ajouter dix caractéres à ceux des Arabes, la mémoire n'en sera pas plus occupée que des 20 lettres de l'alphabet, & supposant qu'un nombre à la seconde place de droite à gauche vaut vingt fois plus qu'à la premiere ; à la troisiéme vingt fois plus qu'à la seconde, &c. On pourra par ce moyen exprimer avec quatre chiffres ce que la méthode ordinaire exprime avec cinq. Ce seroit se défier de nos Lecteurs que d'en donner la démonstration après tout ce que nous avons dit.

2 . . . . unités.
4 . . . . dixaines d'unités.
7 . . . . centaines d'unités.
9, ... unités de milles.
3 . . . . dixaines de milles.
8 . . . . centaines de milles.
6, ... unités de millions.
1 . . . . dixaines de millions.
2 . . . . centaine de millions.
4, ... unités de billions.
9 . . . . dixaine de billions.
7, ... centaine de billions.
3, ... unités de trillions.
5 . . . . dixaine de trillions, &c.

En distinguant toute la suite de ces chiffres par une virgule de trois en trois, j'appelle chaque espace qui comprend trois chiffres un *Ternaire*. Le premier est le Ternaire des unités, des dixaines, des centaines simples, le second celui des milles, le troisiéme contient les millions, ce sont les billions au quatriéme, les trillions au cinquiéme, les quatrillions au sixiéme, les quintillions au septiéme, les sextillions au huitiéme, &c.

Desorte donc que, pour énoncer avec facilité une longue suite de chiffres, il faut bien remarquer que chaque Ternaire ne contient que des unités, des dixaines & des centaines sans autre dénomination pour celles qui sont au premier Ternaire, on ajoutera mille au second, millions au troisiéme. &c.

Il seroit facile maintenant d'énoncer la suite des chiffres dans l'éxemple exposé ci-dessus, si nous n'avions pas à prévenir les commençans sur l'ordre dans lequel les chiffres s'énoncent.

Nous avons vu que les nombres croissent en al-

lant de droite à gauche; mais on les énonce, comme on lit, de gauche à droite. Supposant le nombre 456, on ne dit pas six cinquante quatre cens, mais quatre cens cinquante-six.

PROBLEME (*a*).

3. *Enoncer ou exprimer par le discours une quantitée donnée en chiffres.*

RESOLUTION. (*b*).

Soit le nonbre 6, 0 7 8, 0 3 4 dont on demande l'expression en paroles.

J'observe d'abord dans le nombre proposé deux Ternaires complets & le commencement d'un troisiéme; il y a donc des millions, des milles, &c. (n°. 2.) C'est pourquoi je dirai *six millions soixante & dix-huit milles trente-quatre*, sans rien prononcer sur les centaines de mille ni sur les cens simples dont la place est occupée par un zero.

Par la même méthode vous énoncerez ainsi la quantité suivante 3, 7 0 9, 8 0 0, 2 6 5, 4 0 3 trois trillions sept cens neuf billions huit cens millions deux cens soixante & cinq milles quatre cens trois. Où vous remarquerez qu'afin de simplifier le discours, on ne dit pas deux cens milles, soixante milles cinq milles; mais seulement deux cens soixante cinq milles, & ainsi des autres Ternaires.

Quoique la résolution de ce Problême paroisse d'une exécution facile à ceux qui ont l'usage du calcul, nous croyons devoir avertir les commençans qu'ils ayent l'attention de s'y exercer beaucoup :

(*a*) Un *Problême* est une question qu'il faut résoudre.

(*b*) On dit que l'on résout un problême quand on satisfait à la question proposée.

quand

quand ils liront à haute voix une Histoire, un Discours, &c. ils ne se trouveront pas exposés à être arrêtés tout court à la rencontre d'une suite de chiffres, comme il n'est que trop ordinaire; ce qui dépare la lecture dont l'uniformité soutenue fait la principale des graces.

PROBLEME.

4. *Rendre en chiffres une quantité exprimée par le discours.*

RESOLUTION.

Si l'on est souvent arrêté dans la résolution du Problême précédent, faute d'exercice, il est rare par la même raison de se garantir d'erreur dans la Résolution de celui-ci. On s'y trompe presque toujours. Voici un moyen d'y procéder en toute sureté.

Soit proposé le nombre trois cens quatre millions cent quatre qu'il faut exprimer en chiffres. J'écris 3 pour les trois cens millions : après quoi descendant par ordre des centaines de millions aux dixaines de millions; je regarde si le discours fait mention des dixaines de millions ; je n'y en vois pas, je mets donc 0 après le 3, ce qui indique qu'il n'y a point de dixaine de millions : descendant des dixaines de millions aux unités de millions, j'en trouve quatre que j'exprime par le chiffre 4 mis après le zero en allant de gauche à droite, parce que les nombres s'énoncent dans cet ordre : après les unités de millions viennent les centaines de milles, il n'en est pas question dans le discours, cette place sera donc remplie par un 0 mis à côté du 4 : ce sera la même chose pour les dixaines de mille & les unités de mille que

le discours n'énonce pas; vous mettrez donc encore deux o à la suite de celui que vous venez d'écrire, & passant aux centaines qui viennent après les unités de mille, comme le discours exprime un cent, on le marquera par 1 à la suite des trois o : après les cens viennent les dixaines en la place desquelles vous mettrez un o puisqu'elles ne sont pas énoncées dans le discours: enfin après les dixaines viennent les unités simples que vous exprimerez par le chiffre 4 ainsi qu'il est énoncé; de sorte que trois cens quatre millions cent quatre s'expriment par les chiffres 304000104 sans écrire à l'avanture, comme l'on fait fort souvent (*a*).

La valeur & l'expression des nombres étant bien connuës, il faut s'attacher à disposer les chiffres dans l'ordre convenable.

PROBLEME.

5. *Donner à plusieurs assemblages de chiffres l'arrangement qui leur convient, par exemple, vous avez reçu d'une part 3064 liv. d'un autre côté 18069 liv. & d'une troisiéme part 398 liv. que vous voudriez disposer les unes sous les autres selon la place qui leur est dûë.*

RESOLUTION.

Ecrivez d'abord la quantité qui a le plus grand

(*a*) On pouvoit marquer les nombres par d'autres figures que les caractéres Arabes, au lieu de dix en établir vingt; ce qui auroit même rendu le calcul plus simple. Mais lorsqu'on est une fois convenu de la valeur de chaque chiffre & de la maniére dont ils croissent suivant la place qu'ils occupent; toutes les opérations ausquelles on pourra les soumettre dans la suite doivent être une conséquence nécessaire de ces premieres conventions. Cette observation n'a été résumée qu'afin que l'on s'accoutume à distinguer une conséquence d'avec une supposition.

nombre de chiffres comme 18069 liv. dispofez ensuite les deux autres fous celle-là, enforte que leurs unités foient directement fous les unités de la premiere, les dixaines fous les dixaines, &c. comme vous le voyez en A.

liv.	
1 8 0 6 9	
3 0 6 4	(A)
3 9 8	

6. De quelque maniere que l'on agiffe fur une quantité, fur un nombre, on ne pourra que l'augmenter ou le diminuer Cette confidération fournit naturellement deux opérations l'*Addition* & la *Souftraction*.

PROBLEME.

7. *Faire l'Addition (a) ou trouver la fomme (b) de plufieurs nombres propofés tels que ceux du Problême précédent.*

RESOLUTION.

Vous les difpoferez ainfi qu'il a été prefcrit (n°. 5.) ou comme vous le voyez en B.

liv.	
1 8 0 6 9	
3 0 6 4	(B)
3 9 8	
liv.	
2 1 5 3 1	fomme ou total.

Vous vous rappellerez enfuite que les unités doi-

(a) *Addition*, ce mot vient du mot latin *additio* qui fignifie l'action d'ajouter un nombre à un autre.

(b) *Somme*, c'eft la valeur totale de plufieurs quantités réünies.

vent être mises avec les unités, les dixaines avec les dixaines, les centaines avec les centaines, &c.

Et après avoir tiré une ligne sous ces rangs ou *colomnes* (a) de chiffres vous direz 9 & 4 sont 13 & 8 sont 21, unités dans lesquelles il y a 2 dixaines & 1 unité; vous poserez donc 1 sous la colomne des unités, & passant à la colomne des dixaines vous y porterez les dixaines que vous avez trouvées par l'addition des unités en disant 2 & 6 sont 8 & 6 sont 14 & 9 sont 23 dixaines qui valent 2 cens & 3 dixaines de plus; vous poserez les 3 dixaines sous la colomn e des dixaines pour passer à la colomne des cens où vous direz 2 (cens que j'ai retenus) & 3 sont 5 cens; car les o ne donnent rien, écrivez donc 5 sous la colomne des cens: passant à la colomne des milles vous direz 8 & 3 sont 11 milles où il y a 1 dixaine de mille avec 1 mille; posez 1 sous la colomne des milles; après quoi vous irez à la colomne des dixaines de milles où vous direz 1 (dixaine de mille que j'ai retenuë) & 1 sont 2 dixaines de milles. Vous écrirez 2 sous la colomne des dixaines de milles, & l'opération achevée donnera pour somme totale 21531 liv.

DEMONSTRATION. (b).

Les quantités sur lesquelles on vient d'opérer sont composées d'unités, de dixaines, de centaines,

(a) J'appelle *colomne horisontale* une suite de chiffres mis les uns à côté des autres, & *colomne verticale* une suite de chiffres mis directement les uns sous les autres. La suite de chiffres 18069 est une colomne horisontale, mais la suite 9 est une colomne verticale.
4
8

(a) *Démonstration*; c'est un discours par lequel on produit une preuve convaincante que l'on a dû trouver ce qui étoit cherché. On y fait voir que les conséquences du raisonnement sont bien liées avec les principes évidens d'où l'on est parti.

&c. il ne s'agissoit donc que de mettre les unités avec les unités, les dixaines avec les dixaines, &c. mais c'est ce que l'on a éxécuté dans la résolution du Problême : ainsi l'on doit avoir ce que l'on cherchoit. C. Q. F. D. (*a*).

8. Les Additions, où le Commerce nous engage, renferment presque toujours des livres, des sols, des deniers (*b*) : des toises, des pieds, des pouces, des lignes, des points : des marcs, des onces, des gros, &c.

L'écu, *monnoye*, vaut. . .	3 livres.
La livre. . . .	20 sols.
Le sol. . . .	12 deniers ou 4 liards.
La toise. . . .	6 pieds.
Le pied. . . .	12 pouces.
Le pouce. . . .	12 lignes.
La ligne. . . .	12 points.
La livre, *pésant*, vaut 2 marcs ou...	16 onces.
Le marc. . . .	8 onces.
L'once. . . .	8 gros.
Le gros. . . .	72 grains, &c.

Toutes ces divisions de mésures ont été introduites afin de faire avec le plus de précision possible tous les partages auxquels le Commerce nous assujettit. Les *Exemples* (*a*) suivans ne laisseront rien à désirer sur les Additions où ces divisions auront lieu.

(*a*) Ces quatre lettres C. Q. F. D. signifient *ce qu'il falloit démontrer*.

(*b*) Une chose assez bisarre dans le calcul de la monnoye est l'introduction du denier qui n'est plus une monnoye d'usage, & la suppression du liard, piéce néanmoins qui a un très-grand cours. Mais il faut que la bisarrerie de l'esprit humain exerce son empire jusques dans les choses destinées à la fixer ou même à l'anéantir.

EXEMPLE (*a*).

9. Où l'on voit comment on fait l'Addition de plusieurs quantités composées de livres, de sols & de deniers. Pour abréger nous marquerons les livres par liv. les sols par s. & les deniers par den.

Trois marchands ont fait une société où le premier a mis 9875 liv. 13 s. 9 den. le second 18094 liv. 18 s. 7 den. & le troisieme 25407 liv. 5 s. 3 den. on veut sçavoir le total de ces différentes sommes.

Disposez les chiffres ainsi que vous le voyez,

18094 liv.	18 s.	7 den.
25407	5	3
9875	13	9
53377 liv.	17 s.	7

& tirant une ligne dessous dites 7 & 3 sont 10 & 9 sont 19 deniers qui valent 1 sol 7 deniers, posez 7 sous la colomne des deniers & passez à la colomne des sols où vous direz 1 (sol que j'ai trouvé à la colomne des deniers) & 8 sont 9 & 5 sont 14 & 3 sont 17 je pose 7 & je retiens 1 dixaine de sols que j'ajoute à la colomne des dixaines de sols en disant 1 & 1 sont 2 & 1 sont 3 dixaines de sols qui valent 1 liv. & 1 dixaine de sols; écrivez 1 sous la colomne des dixaines de sols, & retenant 1 liv. vous l'ajouterez à la colomne suivante des unités de livres où vous direz 1 (livre retenuë) & 4 sont 5 & 7 sont 12 & 5 sont 17, posez 7 & retenez 1 (dixaine de livres) que vous porterez à la colomne des dixaines où vous direz 1 & 9 sont 10 & 7 sont 17 di-

(*a*) *Exemple*. Ce qui est proposé pour imiter.

zaines qui valent 1 cent & 7 dixaines posez 7 sous la colomne des dixaines & retenant 1 cent pour la colomne des cens où vous passerez en disant 1 & 4 font 5 (o ne se compte point) & 8 sont 13 cens qui valent 3 cens & 1 mille. Posez 3 sous la colomne des cens & portez 1 mille à la colomne des milles où vous direz 1 & 8 sont 9 & 5 sont 14 & 9 sont 23 milles, posez 3 milles sous la colomne des milles & retenez 2 dixaines de milles pour la colomne des dixaines de milles où vous direz 2 & 1 sont 3 & 2 sont 5 écrivez 5 sous les dixaines de milles, & l'opération est finie.

EXEMPLE.

10. Où l'on voit la maniere d'additionner plusieurs quantités composées de toises, pieds, pouces, &c.

Un Entrepreneur est chargé de l'éxécution de quatre ouvrages. Suivant l'estimation qu'il en a faite le premier contiendra 9765 toises 2 pieds 9 pouces; le second 7009 toises 5 pieds 10 pouces; le troisiéme 878 tois. 4 pieds 11 pouc., & le quatriéme 765 tois. 3 pieds 7 pouc. on demande le total de toutes ces toises.

Disposez toutes ces quantités les unes sous les autres comme il est enseigné au n°. 5.

toises	pieds	pouces
9765	2	9
7009	5	10
878	4	11
765	3	7
18419	5	1

Après avoir tiré une ligne sous toutes ces quanti-

tés ainsi disposées, dites 9 & 10 font 19 & 11 font 30 & 7 font 37 pouces où il y a 3 pieds & 1 pouce. Ecrivez 1 sous la colomne des pouces & portant 3 à celle des pieds dites 3 & 2 font 5 & 5 font 10 & 4 font 14 & 3 font 17 pieds qui valent 2 toises & 5 pieds; marquez 5 sous la colomne des pieds & portez 2 à la colomne des toises où vous continuerez l'opération comme au Problême 4 : vous trouverez que la somme totale est 18419 toises 5 pieds 1 pouce.

EXEMPLE.

11. Où l'on trouve la somme de différentes quantités composées de marcs d'onces & de gros.

Outre plusieurs bijoux d'un très-grand prix on a trouvé chez un Juif dont les effets ont été confisqués premierement 903 marcs 7 onces 7 gros d'argent; secondement 7658 marcs 7 onc. 3 gros; d'une troisiéme part 878 marcs 2 onc. 4 gros de la même monnoye. Quel est le total de ces différentes quantités.

Disposez ces trois quantités comme il est enseigné au n°. 5.

marcs	onces	gros
7658	7	3
903	7	7
878	2	4
marcs	onces	gros
9441	1	6

& vous commencerez l'opération par l'addition des gros que vous continuerez jusqu'à la fin où vous devez trouver pour total 9441 marcs 1 once 6 gros. Je ne donne ici que le résultat de cette opération afin que les commençans apprennent à faire usage de leurs propres lumieres.

Cependant il y a encore un cas qu'il est besoin d'expliquer, c'est lorsqu'on doit mettre o sous la colomne dont on fait l'Addition.

EXEMPLE.

	liv.
4832	
653	
595	
	liv.
6080	

Comptons. 2 & 3 sont 5 & 5 sont 10. Comme il y a une dixaine juste, je mets o sous les unités pour marquer qu'il n'y a point d'unités, & je porte 1 dixaine à la colomne des dixaines où je dis 1 & 3 sont 4 & 5 sont 9 & 9 sont 18 je pose 8 & je retiens 1 cent que je porte à la colomne des cens en disant 1 & 8 sont 9 & 6 sont 15 & 5 sont 20 cens qui valent 2 milles exactement, je pose donc o sous les cens pour faire voir qu'il n'y a pas des cens, & portant 2 milles à la colomne des milles je dis 2 & 4 sont 6 milles j'écris 6 milles, & l'opération est finie.

On peut donc définir l'Addition, *la réünion de plusieurs quantités dont on détermine la somme*.

Pour éviter les erreurs d'inadvertance qui peuvent se glisser dans le cours *du calcul* (*a*), je n'ai point de meilleur avis à donner que celui de recommencer l'opération par la même méthode. Il ne faut pas que les commençans se piquent d'expédier rapidement un calcul, c'est aller assez vîte que d'aller avec sureté.

(*a*) *Calcul* : ce mot vient du latin *calculus* pierre, parce que les anciens se servoient de petits cailloux pour faire leurs comptes ou supputations.

12. Il y a une autre méthode de faire l'Addition beaucoup plus ſimple & plus expéditive que la précédente lorſqu'il s'agit de ttouver la ſomme de pluſieurs quantités égales ou de prendre une même quantité un certain nombre de fois. Si on demandoit la ſomme de 329 liv. écrites 58 fois ; il eſt évident que le calcul en ſeroit très-long ſuivant l'opération dont nous venons de faire uſage.

Mais en faiſant attention à la maniere dont on eſt convenu que les nombres croiſſent par rapport à leur place ; l'Addition des quantités égales ſe fait avec une extrême facilité. Rappellez-vous qu'un chiffre à la ſeconde place (en allant de droite à gauche) vaut dix fois plus qu'à la premiere ; à la troiſiéme place 100 fois plus qu'à la premiere : à la quatriéme place 1000 fois plus qu'à la premiere, &c,

Ainſi pour rendre le nombre 9 dix fois plus grand on écrit 90, pour le rendre 100 fois plus grand écrivez 900. Ceci bien entendu *on demande qu'elle eſt la ſomme du nombre 329 pris 58 fois.*

OPERATION.

```
   329
    58
 -----
  2632
 1645
 -----
 19082
 -----
```

Ecrivez 58 ſous 329. Il eſt clair que le nombre 329 ſera pris 58 fois ſi chaque chiffre, dont ce nombre eſt compoſé, eſt pris 8 fois & enſuite 50 fois. Dites donc 8 fois 9 = 72 poſez 2, & retenant 7

dixaines vous direz 8 fois 2 dixaines sont 16 dixaines & 7 (retenuës) sont 23 dixaines, écrivez 3 dixaines & retenant 2 cens dites 8 fois 3 = 24 cens avec 2 cens qui ont été retenus, vous aurez 26 cens qui valent 2 milles 6 cens; écrivez 6 sous les cens & avancez les 2 milles. Par cette opération le nombre 329 est pris 8 fois.

Il s'agit présentement de le prendre 50 fois. Prenons-le 5 fois; mais reculons d'une place la somme qui doit nous venir afin qu'elle devienne encore 10 fois plus grande. Opérons, 5 fois 9 sont 45 je pose 5 sous les dixaines & je retiens 4. Ensuite 5 fois 2 sont 10 & 4 sont 14, posant 4 je retiens 1, après quoi je dis 5 fois 3 = 15 & 1 (que j'ai retenu) sont 16, je pose 6 & j'avance 1. Par cette seconde opération le nombre 329, qui ne paroît pris que 5 fois, est réellement pris 50 fois. Premierement 5 fois par le nombre 5 qui a donné 1645, lequel nombre est dix fois plus grand qu'il ne paroît à cause que tous ces chiffres sont reculés d'une place. Or 10 fois 5 = 50. Tirant ensuite une ligne sous les deux résultats que l'on vient de trouver, on en fera l'Addition à l'ordinaire qui produira 19082 liv.

Lorsqu'un nombre est pris autant de fois qu'un autre nombre l'indique, cela s'appelle *multiplier*; l'opération que nous venons de faire est donc *une Multiplication* que l'on pourroit définir une *Addition de quantités égales*. Le nombre 329 que nous avons multiplié est appellé *multiplicande* ou *nombre à multiplier*. Le nombre 58 par lequel nous avons multiplié est appellé *multiplicateur*. La quantité 19082 liv. qui a résulté de cette multiplication est ce que l'on appelle *le produit*.

On a vu par l'opération que toute la difficulté de la Multiplication consistoit à trouver sur le champ le produit d'un chiffre par un autre chiffre. C'est pour-

quoi nous allons donner une Table des produits de chaque chiffre par chacun des autres chiffres afin que les commençans l'apprennent par cœur ou qu'ils la consultent au besoin ; ce qui est très-utile pour calculer avec facilité.

TABLE DE MULTIPLICATION.

1 fois 1 = 1	2 fois 1 = 2	3 fois 1 = 3
1 fois 2 = 2	2 fois 2 = 4	3 fois 2 = 6
1 fois 3 = 3	2 fois 3 = 6	3 fois 3 = 9
1 fois 4 = 4	2 fois 4 = 8	3 fois 4 = 12
1 fois 5 = 5	2 fois 5 = 10	3 fois 5 = 15
1 fois 6 = 6	2 fois 6 = 12	3 fois 6 = 18
1 fois 7 = 7	2 fois 7 = 14	3 fois 7 = 21
1 fois 8 = 8	2 fois 8 = 16	3 fois 8 = 24
1 fois 9 = 9	2 fois 9 = 18	3 fois 9 = 27
4 fois 1 = 4	5 fois 1 = 5	6 fois 1 = 6
4 fois 2 = 8	5 fois 2 = 10	6 fois 2 = 12
4 fois 3 = 12	5 fois 3 = 15	6 fois 3 = 18
4 fois 4 = 16	5 fois 4 = 20	6 fois 4 = 24
4 fois 5 = 20	5 fois 5 = 25	6 fois 5 = 30
4 fois 6 = 24	5 fois 6 = 30	6 fois 6 = 36
4 fois 7 = 28	5 fois 7 = 35	6 fois 7 = 42
4 fois 8 = 32	5 fois 8 = 40	6 fois 8 = 48
4 fois 9 = 36	5 fois 9 = 45	6 fois 9 = 54
7 fois 1 = 7	8 fois 1 = 8	9 fois 1 = 9
7 fois 2 = 14	8 fois 2 = 16	9 fois 2 = 18
7 fois 3 = 21	8 fois 3 = 24	9 fois 3 = 27
7 fois 4 = 28	8 fois 4 = 32	9 fois 4 = 36
7 fois 5 = 35	8 fois 5 = 40	9 fois 5 = 45
7 fois 6 = 42	8 fois 6 = 48	9 fois 6 = 54
7 fois 7 = 49	8 fois 7 = 56	9 fois 7 = 63
7 fois 8 = 56	8 fois 8 = 64	9 fois 8 = 72
7 fois 9 = 63	8 fois 9 = 72	9 fois 9 = 81

Cette Table s'explique d'elle-même ; on observera seulement que, lorsque deux nombres se multiplient, l'on peut prendre lequel des deux on voudra pour multiplicande. Ainsi $3 \times 4 = 4 \times 3$. Néanmoins pour éviter le trop grand nombre des produits particuliers, il est mieux de prendre pour multiplicande celle des deux quantités qui a un plus grand nombre de chiffres, comme on va le voir dans les éxemples suivans.

Définition de la Multiplication.

13. Nous avons dit que l'on pouvoit définir la Multiplication, une *Addition de quantités égales* ; mais par la maniére dont on éxécute cette opération on peut la représenter sous un autre point de vue, & dire que la Multiplication *est une opération par laquelle on prend une quantité autant de fois qu'il est marqué par une autre.*

PROBLEME.

14. *La hauteur d'une piramide* = 369 *pieds ; qu'elle est sa hauteur en pouces ?*

On sçait qu'un pied = 12 pouces. Il faut donc prendre 12 pouces 369 fois. Ainsi cette question se résout par une multiplication.

369	multiplicande.
12	multiplicateur.
738	
369	
4428	produit.

Ecrivez donc 12 sous 369, & multipliez d'abord

369 par 2 en disant 2 fois 9 sont 18, je pose 8 & je retiens 1; ensuite 2 fois 6 sont 12 & 1 sont 13, je pose 3 & je retiens 1, continuant de dire 2 fois 3 sont 6 & 1 sont 7, j'écris 7.

Après cela nous multiplierons tous les chiffres du multiplicande 369 par le second chiffre 1 du multiplicateur; il faudra donc dire 1 fois 9 = 9, posons 9 sous les dixaines, parceque 1 est une dixaine qui multiplie. Ensuite 1 fois 6 est 6, écrivez 6 sous les cens; enfin 1 fois 3 & 3, écrivons 3 en avançant: ce 3 exprime 3 milles. Tirons une ligne sous les deux produits que nous avons trouvés; faisons-en l'addition, on verra que 369 pieds contiennent 4428 pouces.

Il n'y a pas plus d'embarras, lorsque le multiplicateur contient des cens, des milles, &c. car tout le multiplicande doit être multiplié successivement par chaque chiffre du multiplicateur.

EXEMPLE.

15. *Combien faudroit-il payer 359 attelages de chevaux de Turquie à 6743 liv. l'attelage?*

On voit qu'il faut prendre 6748 liv. trois cens cinquante-neuf fois.

```
     6748
      359
   ------
    60732
   33740
  20244
  -------
  2422532 liv.
```

Ecrivez donc 359 sous 6748, & commencez par multiplier tout le nombre 6748 par 9, en disant 9

fois 8 = 72, posez 2 & retenez 7 (observant généralement de retenir toujours les dixaines) ensuite 9 fois 4 sont 36 & 7 sont 43, écrivez 3 & retenez 4 puis vous direz 9 fois 7 sont 63 & 4 sont 67, écrivez 7 & retenez 6, dites encore 9 fois 6 sont 54 & 6 sont 60, écrivez 0 & avancez 6. Par cette premiere opération le nombre 6748 est pris neuf fois. Multipliez ce même nombre 6748 par le second chiffre 5 du multiplicateur, & dites 5 fois 8 sont 40, posez 0 sous les dixaines & retenez 4; ensuite 5 fois 4 sont 20 & 4 sont 24, écrivez 4 & retenez 2; après cela dites 5 fois 7 sont 35 & 2 sont 37, posez 7 & retenez 3; enfin 5 fois 6 sont 30 & 3 sont 33, écrivez 3 & avancez 3. Cette seconde opération rend le nombre 6748 cinquante fois plus grand. Il faut encore prendre ce même nombre 300 fois, c'est-à-dire, le multiplier par 3, & reculer ce produit de deux places. Dites donc 3 fois 8 sont 24, posez 4 sous les cens, & retenant 2 vous direz 3 fois 4 sont 12 & 2 sont 14, posez 4 & retenez 1. Continuez de dire 3 fois 7 sont 21 & 1 sont 22, écrivez 2 & retenez 2. Après cela 3 fois 6 sont 18 & 2 sont 20, écrivez 0 & avancez 2. Ce dernier produit rend le nombre 6748 trois cens fois plus grand, & par conséquent les trois opérations que nous avons faites sur ce nombre l'ont rendu 359 fois plus grand: ainsi tirant une ligne sous ces trois produits pour en faire l'addition, on trouvera que 6748, multiplié par 359, produiront 2422532 liv. Il n'est pas nécessaire d'entrer dans le détail d'un plus grand nombre de cas. Voici seulement quelques exemples que l'on pourra imiter.

Un homme dépense par jour 598 liv. combien dépense-t'il par an?

L'année étant composée de 365 jours il faudra multiplier 598 liv. par 365.

OPERATION.

	598
	365
	2990
	3588
	1794
Réponse. . .	218270

Quand il y a des zeros au multiplicateur on ne multiplie point par ces chiffres. Voyez l'éxemple suivant.

On a levé une contribution sur 4008 *Financiers qui ont payé par tête* 8059 *liv. quel est le produit de cette contribution?*

OPERATION.

	8059 liv.
	4008
	64472
	32236
Réponse. . .	32300472 liv.

Où vous voyez qu'après avoir multiplié 8059 par 8, on multiplie tout de suite ce même nombre par 4, parce que les zeros ne produisent rien; observant toujours de mettre le premier chiffre d'un produit sous le nombre qui multiplie.

Il y a des multiplications d'une autre espece; nous en parlerons après avoir donné les connoissances

sances nécessaires à l'intelligence de ces opérations.

Si vous voulez vérifier une Multiplication, ce qu'il ne faut jamais oublier, ou recommencez l'opération ou bien du multiplicateur, faites-en le multiplicande ainsi que nous l'avons éxécuté sur le dernier éxemple.

```
     4008
     8059
    ------
    36072
   20040
 32064
 --------
 32300472
 --------
```

Où l'on trouve le même produit que ci dessus: Si cela ne se trouvoit pas il y auroit de l'erreur; car il est évident que 8 par 4 ou 4 par 8 doivent donner 32. Jettez un coup d'œil sur la figure M & vous

```
            8
  . . . . . . . .
  . . . . . . . .   (M)
4 . . . . . . . .
  . . . . . . . .
```

verrez que 8 points écrits 4 fois produisent précisément le même nombre que 4 points écrits 8 fois.

DE LA SOUSTRACTION.

16. Cette opération consiste à trouver la *difference* qu'il y a entre deux quantités. Pour sçavoir de combien 12 surpasse 7, on retranche, on ôte ou l'on soustrait 7 de 12; ce qui produit 5 qui est la diffé-

rence de 12 à 7 où l'excès d... appelle aussi *le reste* à cause que l'on a... coutume de s'exprimer ainsi dans la Soustraction; *de 12 ôtez 7 il reste 5*.

PROBLEME.

17. *L'aîné d'une famille a 4897 liv. de bien & son cadet 2534 liv. de combien l'aîné est il plus riche que le cadet?*

RESOLUTION.

Il est clair qu'il faut trouver la différence de 4897 liv. à 2534 liv. & par conséquent ôter le plus petit nombre du plus grand; car il n'est pas possible d'ôter le plus grand du plus petit. Disposez donc 2534 sous 4897, comme vous avez fait dans l'Addition, & retranchez successivement les unités des unités, les dixaines des dixaines, les centaines des centaines, comme il est expliqué par l'opération qui suit.

OPERATION.

4 8 9 7	liv.
2 5 3 4	
2 3 6 3	reste ou différence.

Commencez cette opération par les unités, & dites, de 7 ôtant 4 il reste 3 : écrivez 3 sous les unités; ensuite 3 de 9 il reste 6 : on écrit 6 sous les dixaines; & continuant cette methode, 5 de 8 il reste 3 : enfin 2 de 4 il reste 2 : desorte que la différence de 4897 à 2534 est 2363. Vous direz donc que le bien de l'aîné surpasse celui de son cadet de 2363 liv.

DEMONSTRATION.

Il eſt certain que l'on a la différence de deux quantités quand on connoît la différence de chacune de leurs parties; or par l'opération vous avez la différence des parties du nombre 4897 à chaque partie correſpondante du nombre 2534. La différence totale des deux nombres vous eſt donc connuë. C. Q. F. D.

L'opération précédente eſt d'une extrême facilité quand tous les chiffres du nombre ſupérieur ſont plus grands chacun que les chiffres correſpondans du nombre inférieur; mais il arrive fort ſouvent que quelques chiffres du nombre ſupérieur ſont plus petits que ceux du nombre inférieur qui leur répondent; ce qui rendroit l'opération impoſſible ſi l'on n'avoit pas trouvé le moyen d'éviter cet inconvénient. Nous allons montrer cet artifice dans les exemples ſuivans.

EXEMPLE.

Un jeune homme reçoit par an, tant pour ſa ſubſiſtance que pour ſon entretien, 2425 *liv. Sa penſion, ſes habits & d'autres menus frais lui coutent* 1978 *liv. que lui reſte-t'il pour ſes amuſemens?*

On réſoudra cette queſtion en cherchant la différence du nombre 2425 liv. à 1978 liv.

OPERATION.

2425	liv.
1978	
447	liv.

Ecrivez donc 1978 sous 2425, après quoi vous direz 8 de 5 n'est pas une chose p[illegible]. Ajoutez 1 dixaine ou 10 à 5 pour avoir 15 & retranchant 8 de 15 il reste 7 que vous écrirez sous les unités. Passez aux dixaines, & comme vous avez augmenté le nombre supérieur d'une dixaine, au lieu de retrancher 7 dixaines vous en ôterez 8 afin de faire disparoître dans cette seconde opération ce que vous avez mis de trop dans la premiere ; dites donc 8 de 2, cela ne se peut ; mettez 1 cent ou 10 dixaines avec 2 dixaines vous aurez 12 dixaines d'où retranchant 8 il reste 4. Opérons sur les cens, qui de 4 cens veut ôter 10 cens (au lieu de 9 cens que l'on retrancheroit si l'on n'avoit pas augmenté le nombre supérieur de 1 cent) la chose n'est pas encore possible ; ajoutons à 4 cens 1 mille ou 10 cens nous aurons 14 cens d'où retranchant 10 cens il reste 4 cens. Le nombre supérieur ayant été augmenté de 10 cens ou de 1 mille, aulieu de retrancher 1 mille nous en retrancherons 2. 2 de 2 il ne reste rien. Celui donc qui reçoit 2425 liv. pour son entretien, y compris sa nourriture, & qui n'y employe que 1978 liv. œconomise 447 liv. dont il peut disposer sans apporter aucun préjudice aux arrangemens qu'il a pris. Il me semble que cette opération est suffisamment expliquée. Cependant encore quelques exemples, afin que l'on s'y éxerce.

EXEMPLE.

On a donné 3204 liv. à un Tailleur, sur quoi il a fourni trois habits. Le premier est estimé 1239 liv. le second 1578 liv. le troisiéme 975 liv. de combien est-on redevable au Tailleur ?

Cette question éxige deux opérations, l'Addition & la Soustraction : trouvez d'abord la som-

me de la valeur totale des habits comme vous le voyez exécuté en B.

PREMIERE OPERATION.

1	5	7	8	liv.
1	2	3	9	(B)
	9	7	5	
3	7	9	2	liv.

SECONDE OPERATION.

3	7	9	2	liv.
3	2	0	4	(A)
.	5	8	8	liv.

Cette somme 3792 liv. surpasse 3204 que l'on a payées d'abord au Tailleur : on déterminera donc par une Soustraction de combien on lui est redevable ; examinez l'Opération A, vous verrez qu'on doit payer au Tailleur 588 liv. on a donc placé 3204 sous 3792, & après avoir tiré une ligne sous ces quantités on a dit 4 de 2, cela ne se peut ; on a augmenté de 10 unités ou de 1 dixaine le nombre supérieur 2 pour avoir 12 dont retranchant 4 il reste 8. On a passé aux dixaines ou il y a o à retrancher de 9 dixaines ; mais il faut augmenter ce o de 1 dixaine afin de retrancher ce que l'on a mis de trop dans la premiere Opération ; on a donc dit 1 de 9 il reste 8. La suite est aisée. Quand les nombres correspondans sont égaux, on écrit o sous le nombre où cette égalité se trouve.

EXEMPLE.

On a retiré d'un Magazin 4403 *aunes d'étoffes, mais on y en a remis* 5213 ; *de combien le Magazin est-il augmenté ?*

OPERATION.

5 2 1 3	aunes.
4 4 0 3	
. 8 1 0	aunes.

Cette augmentation se trouve en retranchant 4403 de 5213, vous direz donc 3 de 3 il reste 0, écrivez 0 ; ensuite 0 de 1 ou rien de 1 il reste 1 ; 4 de 12 il reste 8 ; 5 de 5 il reste rien. Où vous remarquerez qu'un ou plusieurs zeros, placés à l'extrémité gauche d'une suite de chiffres, ne sont d'aucune utilité ; c'est pourquoi on a coutume de remplir leur place par des points comme vous le voyez sous 4.

Il n'est pas plus difficile d'éxécuter cette opération quand la question suppose des quantités de différente espece, comme livres, sols, deniers, ou toises, pieds, pouces, &c. un éxemple suffira.

Une piramide est haute de 498 *pieds* 7 *pouces* 8 *lignes, il y a près de cette piramide une tour dont la hauteur contient* 319 *pieds* 9 *pouces* 10 *lignes. De combien la piramide surpasse-t'elle la tour ?*

OPERATION.

4 9 8 pieds	7 pouces	8 lig.
3 1 9	9	10
1 7 8	9	10

On écrira la plus petite quantité ſous la plus grande. On tirera une ligne & l'on dira 10 lignes de 8 lignes, cela ne ſepeut ; on ajoutera 12 à 8, parce que les unités de la colomne ſuivante ſont 12 fois plus grandes que celles de la colomne ſur laquelle on opere (un pouce étant égal à 12 lignes) on aura donc 20 lignes d'où retranchant 10 il reſtera 10 lignes que l'on écrira. Paſſant à la colomne des pouces, aulieu de retrancher 9 pouces on en retranchera 10 en diſant 10 de 7 cela n'eſt pas poſſible ; ajoutez 12 à 7, c'eſt à-dire, ajoutez une unité de la colomne ſuivante qui contient des pieds dont chacun = 12 pouces. Vous aurez 19 pouces dont retranchant 10 il reſte 9. Ecrivez 9 ſous les pouces. Allez à la colomne des pieds où vous retrancherez 10 pieds aulieu de 9 à cauſe que vous avez augmenté le nombre ſupérieur d'un pied ou de 12 pouces : ainſi 10 pieds de 8 pieds cela ne ſe peut, ajoutez à 8 une unité de la colomne ſuivante, c'eſt-à-dire, 10 pour avoir 18 d'où vous ôterez 10 pour écrire 8. Enſuite 2 de 9 il reſte 7. 3 de 4 il reſte 1. Ainſi la piramide ſurpaſſe la tour de 178 pieds 9 pouces 10 lignes.

Pour vérifier cette opération on peut la recommencer ; mais il y a un autre moyen qu'il eſt à propos de ne pas ignorer.

OPERATION.

498 pieds	7 pouc.	8 lig.
319	9	10
178	9	10
498	7	8

En reprenant l'opération précédente; si on suppose qu'elle soit faite éxactement; la quantité 178 pieds 9 pouces 10 lignes est la différence de la plus petite hauteur à la plus grande; en augmentant donc cette petite hauteur de cette différence, elle ne doit plus différer de la plus grande: c'est pourquoi la somme de ces deux quantités doit égaler 498 pieds 7 pouces 8 lignes en cas que l'opération ait toute la justesse possible. Faisons l'addition. 10 & 10 font 20 lignes = 1 pouce 8 lignes, écrivez 8 sous les lignes, & retenez 1 pouce pour dire 1 & 9 font 10 & 9 font 19 pouces = 1 pied 7 pouces, écrivez 7 sous les pouces, & retenant 1 pied vous direz 1 & 9 font 10 & 8 font 18, posez 8 & retenez 1 dixaine. Ensuite 1 & 1 font 2 & 7 font 9 écrivez 9. Enfin 1 & 3 font 4 marquez 4: où vous voyez que la différence ajoutée à la plus petite quantité redonne la plus grande. Le premier calcul étoit donc éxact. Autrement il y auroit de l'erreur; en ce cas il faudroit recommencer l'opération avec un peu plus d'attention.

DE LA DIVISION.

18. On fait la Soustraction d'une maniere bien plus abrégée en plusieurs cas qui se présentent très-souvent dans le commerce de la vie. On veut sçavoir, par éxemple, combien il y a de louis d'or dans 864 liv. un louis d'or = 24 liv. ainsi en retranchant 24 de 864 autant de fois qu'il pourra y être contenu, on aura le nombre de louis d'or compris dans 864 liv. Or par la méthode de la Soustraction que nous avons expliquée, il faudroit faire 36 opérations, c'est-à-dire, retrancher 24 trente-six fois de 864, ce qui est d'un détail à ne pas finir. On a donc cherché une voye plus expéditive; c'est ce

qui a donné naissance à la Regle d'Arithmétique, nommée *division* à cause qu'elle sert à faire toute sorte de partages. Voici ce que c'est & à quoi cette Regle se réduit. Vous voulez partager 48 liv. à 6 personnes ? Considérez que si le nombre 48 étoit simplement 6, chaque personne auroit 1 liv. s'il étoit 2 fois 6, il reviendroit 2 liv. à chacune, s'il étoit 3 fois 6, chaque personne auroit 3 liv. & ainsi de suite : par conséquent chaque personne aura autant de fois 1 que le nombre 6 est compris de fois dans 48. La question se réduit donc à chercher combien de fois le nombre auquel on fait le partage est compris dans celui que l'on se propose de partager. Le nombre 48 que l'on veut partager est appellé *dividende*, le nombre 6 auquel on partage est appellé *diviseur*. Le résultat de la division se nomme *quotient* ; ainsi 48 liv. divisées à 6 donnent 8 liv. pour quotient ; ce mot vient du latin *quoties* combien de fois, parce qu'il exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.

EXEMPLE.

3 *Personnes ont à partager également 4932 liv. combien doit-il revenir à chacune d'elles ?*

OPERATION.

Dividende. . . 4932 liv.	3. .	Diviseur.
3	1644 liv.	Quotient.
19		
18. .		
. 13 .		
12		
12		
12		
. .		

Suivant ce que nous avons dit il faut chercher combien de fois le diviseur 3 est compris dans le dividende 4932. Pour cela disposez le dividende & le diviseur comme il est éxécuté ici en les séparant par une ligne verticale coupée par un trait horisontal au-dessus duquel est écrit le diviseur 3, & audessous on voit le quotient 1644 qu'il s'agit de trouver. Observons que le dividende 4932 est composé de milles, de cens, de dixaines & d'unités simples, & qu'ainsi nous aurons partagé tout ce nombre, si nous partageons successivement les milles, les cens, &c. Commençons par les milles (nous dirons par la suite pourquoi il est plus avantageux de commencer cette opération par les plus grands chiffres, au lieu que les opérations précédentes ont commencé par les plus petits.) Marquez un point sous 4 milles afin de déterminer le premier membre de votre division. Après quoi vous direz en 4 combien de fois 3, on trouve 1, écrivez 1 au quotient sous la ligne horisontale. Cet 1 signifie 1 mille, car ce sont des milles que nous partageons. Pour sçavoir si 3 n'est réellement contenu qu'une fois dans 4, prenons 3 une fois ou multiplions-le par 1 en disanr 1 fois 3 est 3, écrivons-le sous le 4 du dividende; tirons une ligne & retranchons 3 de 4, il reste 1 mille qui ne peut plus se partager en qualité de mille à 3 personnes; descendons le 9 du dividende à côté de 1 sous la petite ligne; marquons un point sous le 9 du dividende, afin de nous rappeller que nous avons opéré sur ce nombre; alors il faut partager 19 cens à 3, & dire en 19 combien de fois 3, il est clair qu'il y est contenu 6 fois, écrivez donc 6 au quotient. Multipliez comme ci-dessus le diviseur 3 par ce nouveau chiffre 6. Ecrivez le produit 18 sous le second membre 19 de votre division; faites la soustraction; vous avez un second reste 1, ce qui

signifie que 3 est réellement contenu 6 fois dans 19, mais qu'il y a 1 de plus : marquez donc un point sous le 3 du dividende, descendez-le à côté du second reste 1 & directement sous lui-même pour avoir 13 dixaines à diviser à 3 personnes. Dites en 13 combien de fois 3, il y est 4 fois : écrivez 4 au quotient ; multipliez 3 par 4 : mettez-en le produit 12 sous 13. Faites la soustraction, il reste 1 à côté duquel vous descendrez les 2 unités du dividende sous lesquelles vous marquerez un point ; il vous reste donc 12 unités à partager à 3 personnes. Dites enfin en 12 combien de fois 3, il y est 4 fois éxactement, écrivez 4 au quotient ; multipliez le diviseur 3 par 4 : écrivez le produit 12 sous 12, & faisant la soustraction on voit qu'il ne reste rien, ce qui fait voir que le diviseur 3 est compris éxactement 1644 fois dans le dividende 4932, ou ce qui revient au même que 3 personnes auxquelles on partage 4932 liv. doivent avoir chacune 1644 liv.

On voit par cette opération qu'après avoir divisé le premier membre du dividende, chaque chiffre que l'on descend fournit un chiffre au quotient ; mais si le chiffre que l'on descend, joint au reste qui peut se trouver, est plus petit que le diviseur, on écrira 0 au quotient.

EXEMPLE.

9 Soldats ont eu l'intrépidité de pénétrer fort avant dans le pays ennemi ; après y avoir reconnu certaines dispositions ils en ont fait le rapport à leur Général. L'avis lui a paru si important qu'il leur a fait payer 2754 liv. combien doit-il revenir à chaque Soldat (a) ?

(a) Quelques personnes trouveront peut-être que les Exemples, que je propose, ne sont pas assez précis ; que j'y fais entrer bien des paroles superflues.

On trouvera la part de chaque Soldat en divisant 2754 par 9.

OPERATION.

```
2 7 5 4 | 9
. . .   |------
2 7     | 3 0 6
---     |
. . 5 4 |
    .
    5 4
    ---
    . .
```

Disposez le dividende & le diviseur comme ci-dessus, & comme il n'y a que 2 milles au dividende, vous ne pouvez pas partager des milles à 9 personnes ; c'est pourquoi vous avancerez jusqu'au chiffre suivant 7 sous lequel vous mettrez un point ; alors 27 cens détermineront le premier membre de votre division. Opérons. En 27 combien de fois 9 ? 3 fois éxactement. Posez 3 au quotient : ce 3 signifie trois cens, parce que vous partagez des cens. Pour voir si 9 est éxactement contenu 3 fois dans 27, dites 3 fois 9 = 27, écrivez 27 sous le premier membre de la division, & retranchant 27 de 27 il ne reste rien : partageons présentement les dixaines, si cela se peut ; marquons un point sous 5, & descendons-le ; mais observant que 9 n'est pas compris dans 5, cela m'indique qu'il n'y aura point de dixaines au quotient, j'écrirai donc 0 à côté du 3 que j'y ai déja placé : après quoi marquant un point sous le chiffre 4 du dividende je le descendrai

Ce n'est pas sans dessein. Les questions de calcul que l'on nous propose de résoudre sont toujours accompagnées des circonstances qui les occasionnent ; il faut donc accoutumer les jeunes gens à mettre un discours en calcul, & à retrancher d'une question tout ce qui lui est étranger.

directement sous lui-même à côté de 5 pour avoir 54 unités qu'il faut diviser par 9 en disant 54 divisez par 9 donnent 6, j écris 6 au quotient. Je multiplie le diviseur 9 par 6; il me vient 54 que j'écris sous 54; je fais la soustraction, & il ne me reste rien: ainsi la part de chaque Soldat sera 306 liv.

Lorsqu'il y a plusieurs chiffres au diviseur, l'opération devient un peu tatonneuse; mais c'est un tatonnement qui a des regles.

EXEMPLE.

Un Terrain contenant 657 toises quarrées a été vendu 204984 liv. parce qu'il est situé très-avantageusement; combien est-ce la toise?

Il est clair qu'il faut partager les 204984 liv. aux 657 toises; ou, ce qui revient au même, qu'il faut partager 204984 en 657 parties.

OPERATION.

2 0 4 9 8 4	6 5 7
1 9 7 1	3 1 2 liv.
. . 7 8 8	
6 5 7	
1 3 1 4	
1 3 1 4	
. . . .	

Comme il y a trois chiffres au diviseur vous en prendrez aussi trois dans le dividende; marquant donc un point sous le 4 qui exprime des milles, vous éxaminerez s'il est possible de partager 204 milles à

657; on ne le peut pas, c'eſt-à-dire qu'il ne peut pas venir des milles au quotient; puiſque pour avoir ſimplement 1 mille il faudroit qu'il y eut au dividende 657 milles au moins; vous poſerez donc encore un point ſous le 9, & le nombre 2049 cens ſera le premier membre de votre diviſion; mais il n'eſt pas aiſé de voir tout d'un coup combien de fois le nombre 657 eſt compris dans 2049; c'eſt pourquoi vous demanderez ſeulement combien de fois le premier chiffre 6 du diviſeur eſt compris dans les deux premiers chiffres 20 du dividende 2049; vous trouverez que 6 eſt compris 3 fois dans 20; vous poſerez donc 3 au quotient; cependant il ne ſuffit pas de ſçavoir que 6 eſt compris 3 fois dans 20 pour écrire 3 au quotient; on doit éxaminer ſi tout le diviſeur 657 eſt réellement contenu 3 fois dans le dividende 2049: multipliant donc le diviſeur 657 par 3 on a 1971 que l'on poſe ſous le dividende 2049; on tire une ligne; on ſouſtrait 1971 de 2049, & l'on écrit deſſous le reſte 78; cela indique que le diviſeur 657 eſt réellement contenu 3 fois dans le dividende 2049, qu'il y a même 78 de plus. Abbaiſſez donc le nombre 8 du dividende directement ſous lui-même & à côté du reſte 78, vous aurez 788 dixaines à diviſer par 657; le premier chiffre 7 du dividende 788 étant aſſez grand pour contenir le premier chiffre 6 du diviſeur, dites en 7 combien de fois 6? il y eſt 1 fois, écrivez 1 au quotient, & multipliez le diviſeur 657 par cet 1; écrivez-en le produit 657 ſous le dividende 788. Faites la ſouſtraction, vous aurez un ſecond reſte 131 à côté duquel vous deſcendrez les 4 unités du dividende & vous aurez 1314 unités à diviſer par 657; dites donc en 13 combien de fois 6? il y eſt 2 fois. Mettez 2 au quotient; & multipliez le diviſeur par ce 2 il produira 1314 que l'on ôtera de 1314, il

ne restera rien. 657 est donc compris 312 fois dans 204984, ou ce qui est la même chose, chaque toise du terrain proposé coute 312 liv.

les tentatives que nous avons faites dans cet éxemple se sont trouvées justes au premier coup; cela n'arrive pas toujours.

EXEMPLE.

469 aunes d'une très-belle étoffe coutent 32035 liv. combien est-ce l'aune?

En partageant les 32035 liv. en 469 parties on verra le prix de chaque aune.

OPERATION.

32035 liv.	469	
2814	68 liv. 6 ſ. 1 den.	$\frac{83}{469}$
·3895		
3752		
·143		

Les 3 chiffres du diviseur 469 n'étant pas contenus dans les 3 premiers chiffres 320 du dividende on en prendra quatre & l'on aura 3203 pour premier membre de la division : ainsi l'on dira en 32 combien de fois 4? il y est justement 8 fois; mais on n'écrira pas d'abord ce nombre 8 au quotient; car en multipliant 469 par 8 on auroit un produit 3752 plus grand que 3203; le diviseur 469 n'est donc pas compris 8 fois dans le premier membre de la division 3203. Supposons qu'il y soit contenu 7 fois; si nous en faisons l'essai en multipliant 469 par 7 nous trouverons le produit 3283 qui est encore

plus grand que 3203 ; mais on peut écrire 6 au quotient. Multiplions donc le diviſeur 469 par ce chiffre 6 ; mettons-en le produit 2814 ſous 3203 ; & après avoir ſouſtrait 2814 de 3203 il reſte 389 dixaines à côté deſquelles on deſcendra les 5 unités du dividende afin d'avoir 3895 unités à diviſer par 469 : comme il y a au dividende 3895 un chiffre de plus qu'au diviſeur 469, on demandera combien de fois le premier chiffre 4 du diviſeur eſt contenu dans les deux premiers chiffres 38 du dividende, ce que l'on doit obſerver généralement toutes les fois qu'un membre de la diviſion a un chiffre de plus que le diviſeur : on dira donc en 38 combien de fois 4 ? il y eſt bien 9 fois ; ſuppoſant donc 9 on multipliera le diviſeur 469 par 9. Le produit 4221 étant plus grand que 3895, c'eſt une preuve que le diviſeur 469 n'eſt pas compris 9 fois dans le dividende 3895 ; on écrira donc 8 au quotient, & l'on multipliera par ce nombre le diviſeur 469 pour avoir le produit 3752 que l'on retranchera du dividende 3895, il reſtera 143 liv. qui ne peuvent plus ſe diviſer en cette qualité par 469. On ne doit pourtant pas négliger ce reſte. C'eſt pourquoi, comme on ſçait qu'une livre = 20 ſols, 143 liv. vaudront 143 fois 20 ſols.

OPERATION.

143	
20	
2860	ſols.

On multipliera donc 143 liv. par 20, le produit ſera 2860 ſols que l'on continuera à diviſer par 469 en

en prenant les 4 chiffres 2860, parce que les trois premiers chiffres ne sont pas suffisans, étant plus petits ensemble que les trois chiffres du diviseur 469. Cette nouvelle division s'éxécutera ainsi que nous venons de l'enseigner très au long, ou comme on le voit pratiqué en (B).

(B)

2 8 6 0 sols | 469
2 8 1 4 | 6 sols
. . 4 6

Ce qui donne 6 sols au quotient; on écrira ces 6 sols à côté des 68 livres que l'on a déja trouvées, en séparant par un point ces deux espéces de quantités. Cette derniére division laisse 46 sols pour reste : or 1 sol = 12 deniers; multipliez donc 46 sols par 12, vous aurez 552 deniers à diviser par 469.

OPERATION.

46
12
9 2
4 6.
5 5 2 den. | 469
4 6 9 | 1 den. 83/469
. 8 3

Mettez des points sous les trois chiffres 552 de votre dividende; & dites en 5 combien de fois

43 écrivez 1 au quotient. Multipliez 469 par 1, écrivez-en le produit 469 sous 552. Faites la soustraction, le reste est 83; ce nombre ne peut plus être divisé par 469 en qualité de deniers; c'est pourquoi, si l'on vouloit pousser la division plus loin, on prendroit des parties de denier, qui ne sont pourtant d'aucune considération. Ainsi cette dernière division produit encore 1 denier que l'on écrira à côté de 6 sols; afin que l'on voye tout d'un coup que chaque aune d'étoffe revient 68 liv. 6 sols 1 den. Comme il reste encore 83 deniers à partager à 469, on écrira ce reste de cette maniére $\frac{83}{469}$ à la suite de 1 denier; ce qui signifie qu'il reste encore 83 deniers à partager à 469 aunes: mais on ne pousse pas l'opération plus loin; parce que le commerce n'admet point en France de monnoyes plus petites que le denier.

Il peut arriver qu'en faisant l'essai du nombre que l'on doit mettre au quotient, on trouve un reste égal ou plus grand que le diviseur; on n'a pas mis alors au quotient la quantité qui convient; puisque le diviseur est contenu dans le dividende proposé plus de fois qu'on ne le suppose; on augmentera donc le quotient jusqu'à ce que le produit du diviseur par le quotient, retranché du dividende, donne un reste plus petit que le diviseur.

EXEMPLE.

On demande la trois mille huit cens quatre-vingt-dix-septiéme partie de 25042 liv.

Divisez 25042 par 3897.

OPERATION.

~~[illegible]~~ alors on extrait la racine quarrée.

en extrayant la racine quarrée de chaque membre on a $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ donc $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$

$x^2+4x=33$

~~$x^2+4x+4=49$~~

$x^2+4x+16=49$

$x+4=7$

$x=7-4$

9

4 ; écrivez 1 au quotient. Multipliez 469 par 1, écrivez-en le produit 469 sous 552. Faites la soustraction, le reste est 83 : ce nombre ne peut plus être … pourquoi.

$$ax^2 = \pm b$$

$$x^2 = \pm \frac{b}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\pm \frac{b}{a}}$$

$$x^2 = a^2$$

$$x = \pm a$$

ou $\pm x = \pm a$

ce qui donne $+x = +a$
$+x = -a$
$-x = +a$
$-x = -a$

$x^2 + px = q$ peut representer une une equation du second degré ou sont renfermées les deux premières puissances de l'inconnue

x^2 peut representer le 1er terme du quarré d'un binome dont x seroit le premier terme et pour que px soit le second terme de ce quarré il faut que $\frac{p}{2}$ soit le second terme de la racine or en ajoutant le quarré de ce second terme $\frac{p^2}{4}$ a chaque membre ~~du second terme~~ de l'equation le 1er terme devient le quarré parfait d'un binome et l'egalité subsistera toujours

OPERATION.

250342	3897	
23382	64 liv. 4 f. 9 den.	2031 / 3897
16522		
15588		
934		
20		
18680 sols		
15588		
3092		
12		
6184		
3092		
37104 den.		
35073		
2031		

Le diviseur 3897, étant plus grand que les quatre premiers chiffres 2503 du dividende, je mettrai un point sous les 4 dixaines du dividende, afin d'avoir 25034 pour premier membre de ma division. Je dirai donc en 25 combien de fois 3? il y est plus de 8 fois (*a*) je n'écrirai pourtant pas 8 au

(*a*) Nous dirons plus bas pourquoi on ne peut pas mettre au quotient un nombre plus grand que celui qui exprime combien de fois le premier chiffre du diviseur est contenu dans les deux premiers chiffres du dividende.

quotient; car en multiplianr 3897 par 8 j'aurois un produit 31176 beaucoup plus grand que 25034, ainsi le diviseur 3897 n'est pas contenu 8 fois dans 25034 : comme il en est même assez éloigné, je suppose qu'il n'y est contenu que 5 fois; Je multiplie donc 3897 par 5, il me vient 19485, que je soustrais de 25034, le reste est 5549, dans lequel le diviseur 3897 est encore compris : ainsi ce diviseur est compris plus de 5 fois dans le dividende 25034. Je prends 6; & faisant l'essai, je trouve que 6 fois le diviseur 3897 = 23382. Cette quantité retranchée du membre à diviser 25034, donne pour reste 1652, qui est plus petit que le diviseur 3897. Cela me fait connoître que 6, est le nombre que je dois écrire au quotient, je l'écris; & continuant l'opération à l'ordinaire je trouve que la trois mille huit cent quatre-vingt dix-septiéme partie de 250342 liv. = 64 liv. 4 sols 9 den. $\frac{2031}{3897}$

Les opérations que l'on fait dans l'essai pour trouver le véritable quotient, doivent être faites sur un papier particulier, afin de ne pas broüiller l'opération principale.

Reprenons en peu de mots tout ce qu'il faut observer dans cette opération importante.

1°. On commence à diviser les plus grands chiffres, parce qu'il y a moins de travail à donner à chaque fois des grandes parties, qu'à en donner des petites.

2°. On doit prendre autant de chiffres dans le dividende, qu'il y en a dans le diviseur; & si l'on remarque que les chiffres du diviseur soient compris dans ceux du dividende, on demandera combien de fois le premier chiffre du diviseur est contenu dans le premier chiffre du dividende; on écrira au quotient le nombre qui exprimera cette quantité, après en avoir fait l'essai.

3°. Quand les chiffres du diviseur sont plus grands que les chiffres du dividende, pris en pareil nombre, il faut prendre un chiffre de plus au dividende; & demander combien de fois le premier chiffre du diviseur est compris dans les deux premiers chiffres du dividende; & ne jamais écrire au quotient aucun chiffre sans avoir essayé s'il convient.

4°. Le nombre de fois, que le premier chiffre du diviseur est contenu dans le premier ou dans les deux premiers chiffres du dividende, est le plus grand nombre que l'on puisse mettre au quotient. Par éxemple, ayant 3999 à diviser par 500, on doit agir sur les quatre chiffres du dividende. Or quoique le premier chiffre 5 du diviseur soit contenu plus de 7 fois dans les deux premiers chiffres 39 du dividende 3999; cependant, comme il n'y est pas tout-à-fait contenu 8 fois, on ne pourra pas mettre plus de 7 au quotient, quoique l'on soit obligé de considérer les deux chiffres suivans 99; car en mettant 8 au quotient, 5 fois 8, qui valent 40 cens, sont plus grands que 39 cens, ils les surpassent de 1 cent, excès plus grand que 99, dont les deux premiers chiffres 39 sont accompagnés; ainsi, 5 n'etant pas contenu 8 fois dans 39, le nombre 500 ne sera pas non-plus contenu 8 fois dans 3999. La raison générale en est qu'en mettant au quotient un nombre plus fort que celui qui exprime combien de fois le premier chiffre du diviseur est contenu dans les deux premiers chiffres du dividende, le produit du quotient par le diviseur éxcédera au moins de 1 la valeur des deux premiers chiffres du dividende; or cette unité suffit pour éxcéder tous les chiffres qui accompagnent les deux premiers chiffres du dividende; parce que tous les chiffres qui accompagnent les deux premiers chiffres du dividende, sont toujours plus petits ensemble qu'une unité prise de ces deux

premiers chiffres, comme il eſt évident par l'inſtitution des nombres : il eſt donc facile de ne mettre jamais au quotient un chiffre trop petit.

5°. Après avoir fait l'opération ſur le premier membre de la diviſion on deſcend le chiffre du dividende qui ſuit immédiatement le premier membre ; ce chiffre deſcendu, joint au reſte de la premiere opération, s'il y en a, ou tout ſeul quand il n'y a point de reſte, forme le ſecond membre de la diviſion. La premiere choſe que l'on doit obſerver à l'égard de ce ſecond membre & des autres ſuivans, c'eſt d'éxaminer ſi le diviſeur eſt contenu dans les chiffres dont ce membre eſt compoſé ; quand cela n'arrive pas, on met o au quotient, & l'on deſcend un autre chiffre : ſi le diviſeur n'étoit pas encore contenu dans ce membre ainſi augmenté, on mettroit un ſecond o au quotient & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que le diviſeur ſoit compris dans le dividende.

6°. Après que le premier membre de la diviſion a fourni un chiffre au quotient, chaque chiffre du dividende que l'on deſcend, en apporte un au quotient ; ainſi l'on ſçait dès le commencement de l'opération, combien il doit y avoir de chiffres au quotient.

7°. A chaque opération que l'on fait, on ne ſçauroit mettre plus de 9 au quotient : voici comme je le prouve. Ou le nombre à diviſer contient autant de chiffres que le diviſeur, ou il en contient un de plus. Si le nombre des chiffres du diviſeur eſt égal à celui des chiffres du dividende, il n'eſt pas poſſible que ce diviſeur ſoit contenu 10 fois dans le dividende, car par éxemple, le plus grand nombre 9999 qui a quatre chiffres, ne contient pas 10 fois 1000, qui eſt le plus petit des nombres à quatre chiffres. De-même, s'il eſt néceſſaire que le dividende ait un chiffre de plus que le diviſeur afin que l'on puiſſe éxécuter une diviſion, on ne pourra pas encore

mettre plus de 9 au quotient : vous avez 399 à diviser par 400, cela ne se peut, 400 n'est pas contenu une fois dans 399, il s'en faut 1 que l'on ne puisse faire la division. Augmentez ce nombre d'un chiffre le plus grand qu'il soit possible ; & par conséquent écrivez 3999 : à la vérité, les trois premiers chiffres 399 sont devenus 10 fois plus grands par l'addition du nouveau chiffre 9 ; mais comme avant leur augmentation, il s'en falloit 1 qu'ils ne continssent une fois 400 : après être devenus dix fois plus grands, il s'en faudra 10 qu'ils ne contiennent dix fois 400. Or le nombre ajouté n'est que 9 ; ainsi, il s'en faut encore 1 que le nombre 400 ne soit contenu 10 fois dans 3999 : ce que les chiffres même 3999 démontrent évidemment. Par conséquent, on ne doit pas mettre plus de 9 au quotient, à mesure que l'on y écrit des chiffres : car ce raisonnement est appliquable à tous les cas possibles.

PROBLEME.

19. *Vérifier la Division & la Multiplication.*

RESOLUTION.

Pour vérifier la division, rappellez-vous que le quotient doit exprimer combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. En prenant donc le diviseur autant de fois que le quotient l'indique, on doit retrouver le dividende, si l'expression est vraie. Vous dites que 35 divisés par 7 = 5, c'est-à-dire que 5 est contenu éxactement 7 fois dans 35 ? Multipliez donc 5 par 7, vous retrouverez 35 : ainsi, afin d'être assuré qu'une division est éxacte, on peut multiplier le quotient par le diviseur ; si on trouve un produit égal au dividende, l'opération est bonne,

autrement, elle eſt fauſſe, on la recommencera.

Quand la diviſion laiſſe un reſte, on ajoute ce reſte au produit du quotient par le diviſeur.

La vérification de la multiplication eſt fondée ſur la diviſion. Quand vous multipliez 8 par 9, vous avez 72, qui contient 8 fois 9 : donc, puiſque 9 eſt éxactement 8 fois dans 72, en diviſant 72 par 9, on doit retrouver 8 ; de même 8 eſt 9 fois dans 72 : ainſi, en diviſant 72 par 8, on doit retrouver 9.

Les nombres 8 & 9, qui concourent à former le produit 72, ſont quelquefois appellés les *racines* de ce produit ; par conſéquent, ſi l'on diviſe un produit par l'une de ſes racines, l'autre doit venir au quotient : cela ne ſe trouvant pas, il y a erreur dans l'opération.

20. La diviſion décompoſe donc ce que la multiplication a compoſé. Ces deux opérations ſont contraires ; en effet, nous avons fait remarquer que l'une étoit une addition & l'autre une ſouſtraction : or il n'y a rien de plus contraire à l'addition que la ſouſtraction.

21. C'eſt pourquoi, ſi on multiplie une quantité par un nombre & que l'on en diviſe le produit par le nombre qui a multiplié, on voit renaître la quantité telle qu'elle étoit avant la multiplication. Multipliez 3 par 4, vous aurez 12. Diviſez 12 par 4, vous retrouverez 3. On doit ſe rendre attentif à cet article.

Abrégé de la Multiplication & de la Diviſion en certains cas.

22. En apportant un peu d'attention à la valeur des chiffres par rapport à leur place (que l'on peut appeller *valeur locale*) on peut éxécuter quelquefois avec une très-grande rapidité la multiplication & la diviſion.

Vous propose-t'on de multiplier 244 par 100? écrivez 24400, en mettant deux zeros à la suite de 244, sans autre forme; car par l'institution des chiffres une quantité que l'on recule de deux places en allant de droite à gauche devient 100 fois plus grande. En effet par la position des deux zeros les unités du nombre 244 sont devenues 400, c'est-à-dire 100 fois plus grandes que 4: les autres chiffres ont augmenté à proportion de leur valeur.

Pour multiplier 244 par 1000 écrivez 244000: en un mot ajoutez autant de zeros au multiplicande que vous en voyez de suite au multiplicateur, pourvu que ces zeros commencent par la place des unités & soient sans aucune interruption.

Quand le multiplicateur & le multiplicande sont terminés par une suite de zeros sans interruption, comme si on se proposoit de multiplier 923000 par 2400. On fait simplement la multiplication des nombres significatifs 923 par 24, & l'on ajoute à leur produit 22152 autant de zeros qu'il y en a au multiplicateur & au multiplicande pour avoir le produit total 2215200000.

Car d'abord en multipliant 923 unités vous avez un produit mille fois trop petit, puisque c'est 923 milles qu'il faut multiplier: ainsi à cet égard on doit augmenter le produit de trois zeros, afin qu'il devienne mille fois plus grand. En second lieu, 923 n'étant multiplié que par 24 donne un produit 100 fois trop petit à raison de son multiplicateur qui est 2400, nombre 100 plus grand que 24. Donc par cet autre côté le produit doit devenir encore 100 fois plus grand, & croître par conséquent de deux zeros outre les trois zeros que le multiplicande lui a donnés.

En général lorsque le multiplicateur est entremêlé de zeros la multiplication ne se fait point par ces zeros.

EXEMPLE.

Il faut multiplier 24013 *par* 60020.

OPERATION.

```
       24013
       60020
     -------
     480260
  144078..
  ----------
  1441260260
```

On ne multipliera que par les chiffres significatifs 2 & 6. On marquera seulement un point ou un zero sous la place de chaque zero comme on le voit éxécuté dans l'opération, afin que le produit des chiffres significatifs occupe la place qui lui convient.

La Division doit s'abréger & s'abrége en effet par une voye contraire à celle de la Multiplication. Voulez-vous diviser 64000 par 100. Otez deux zeros au dividende, écrivez simplement 640, c'est le quotient que vous cherchez. Car si une quantité devient cent fois plus grande en lui ajoutant deux zeros, c'est une nécessité qu'elle devienne 100 fois plus petite en les supprimant : & si vous divisiez 64000 par 1000 vous ôteriez trois zeros par la même raison.

Lorsque le dividende n'est pas terminé par des zeros de suite, comme quand on a 34693 à diviser par 1000, on doit toujours retrancher autant de chiffres significatifs que le diviseur a de zeros de suite précédés de l'unité. Ainsi on écrira au quotient 34 ;

mais on doit tenir compte des chiffres significatifs retranchez que l'on marque ainsi $\frac{693}{1000}$ à la suite du quotient 34, ou d'une maniere plus expéditive, marquez un point après les trois premiers chiffres 693, & écrivez le diviseur 1000 sous ces trois chiffres séparés comme vous le voyez 34.$\frac{693}{1000}$. Nous avons dit ailleurs comment l'on opéroit sur ce reste. Quand le dividende & le diviseur sont terminés par une suite de zeros, comme si l'on avoit 24000 à diviser par 300, on supprime au dividende autant de zeros qu'il y en a au diviseur dont on ôte aussi les zeros, & l'on fait l'opération sur les restes ; ici on diviseroit simplement 240 par 3. La raison en est que 24000 sont la même chose que 240 × 100 & 300 reviennent à 3 × 100 ; or en divisant 240 × 100 par 3 × 100 on voit que 100 multiplie 240, dont le produit va être divisé par le triple de 100 ; par conséquent le 100 doit s'anéantir de part & d'autre puisque la division est contraire à la multiplication.

S'il n'y avoit qu'un zero à la fin du dividende, tandis que le diviseur en auroit plusieurs, on supprimeroit simplement un zero au dividende & un zero au diviseur. Ainsi 3240 à diviser par 300 se réduiroit à 324 à diviser par 30. La raison en est claire.

Il y a bien d'autres petites adresses qui abrégent extrêmement le calcul. L'usage & l'attention à la signification des chiffres vous feront découvrir de petits sentiers ; mais il faut chercher. La routine ne trouve rien. Cependant je dois vous faire connoître un abregé de division fort commode, & qui revient très-souvent dans le Commerce. C'est lorsqu'il s'agit de diviser un nombre par 20. On propose, par exemple, de déterminer combien il y a de livres dans 817035 sols. Une livre = 20 sols. La ques-

tion se réduit à trouver combien il y a de fois 20 sols dans 817035, & par conséquent à diviser ce nombre par 20 ou à en trouver la vingtiéme partie.

Pour comprendre l'artifice dont je vais me servir, faites attention que l'on peut avoir la vingtiéme partie d'une quantité en prenant la moitié de sa dixiéme partie. La dixiéme partie de 40 est 4, dont la moitié 2 est la vingtiéme partie de 40.

Après avoir bien conçu que la moitié d'un dixiéme est un vingtiéme, reprenons le nombre 817035, supposons que ce soient des livres; cette supposition donne un nombre de livres 20 fois trop fort; il faut donc prendre la vingtiéme partie de ces livres, c'est-à-dire les diviser par 20: ainsi tous les chiffres de ce nombre doivent devenir 20 fois plus petits.

OPERATION.

8	1	7	0	3	| 5 sols	
4	0	8	5	1 liv.	15 sols	

Otons le dernier chiffre 5 comme il est pratiqué dans l'opération; dès-là tous les nombres 81703 deviennent dix fois plus petits ou ne sont plus que la dixiéme partie de ce qu'ils étoient; prenons-en la moitié, nous en aurons la vingtiéme partie, puisque la moitié d'un dixiéme est un vingtiéme. Disons donc la moitié de huit dixaines de milles est 4, je l'écris. Ensuite la moitié de 1 mille ne donne point de mille, j'écris 0 sous le mille: mais ce 1 mille joint avec 7 cens donne 17 cens dont la moitié = 8 cens, & il reste 1 cent qui étant joint avec 0 fait 10 dixaines dont la moitié est 5 dixaines, j'écris 5 sous les dixaines. Enfin la moitié de 3 est 1, & il reste 1 que je joins à 5 pour avoir 15 liv. à diviser par 20 ou la vingtiéme partie de 15 liv. Or la vingtiéme partie de

de 1 liv. est 1 sols. donc la vingtiéme partie de 15 livres est 15 sols : ainsi 817035 sols se réduisent à 40851 liv. 15 s. par une méthode beaucoup plus prompte que la division ordinaire par 20.

J'avertirai même en passant, que si l'on avoit à diviser un nombre par 30, on en trouveroit le quorient en coupant le dernier chiffre & prenant le tiers du reste : si on divisoit par 40, on en prendroit le quart ; & le cinquiéme si c'étoit par 50, &c. observant, quand il y a un reste, de le mettre au-dessus d'une petite ligne horizontale sous laquelle on pose le diviseur. Pour peu que l'on veüille se donner la peine d'opérer, on en verra facilement la démonstration.

23. *Toutes les méthodes* de l'Arithmétique se réduisent donc à quatre ; addition, multiplication, soustraction, division. Les différentes transformations ausquelles nous soumettrons les chiffres dans la suite, ne seront qu'une application de ces méthodes. Cependant on ne doit y avoir recours que quand on a quelque peine à calculer de tête. L'ART n'a été établi que pour soulager la nature : tant qu'elle peut se passer de son secours c'est toujours *le mieux :* j'avertis de ceci, parce que ceux qui mettent la plume à la main pour les moindres calculs, tombent dans une paresse de génie qui n'est que trop ordinaire.

Nous n'avons point parlé de la multiplication ni de la division composée ; ces opérations seront plus intelligibles, quand nous aurons expliqué une espéce de calcul, appellé *le calcul des fractions* ; mais avant que d'y entrer, je suis bien aise de convaincre mes Lecteurs que des questions fort importantes, qui ne paroissent pas d'abord pouvoir se résoudre par les opérations que nous avons démontrées, en tirent néanmoins leur résolution.

Regle de Trois ou de proportion.

PROBLEME.

24. *En 12 heures un homme fait 18 lieuës, combien en fera-t'il à proportion en 30 heures.*

On suppose que ce voyageur marche toujours d'un pas égal.

RESOLUTION.

Cette question se résout, parceque l'on appelle une *Régle de trois*, à cause que l'on y donne les trois termes 12, 18, 30. D'autres la nomment une *Régle de proportion.* Cette dénomination est plus convenable, elle renferme l'esprit de la chose ; car la quantité de lieuës, que l'on cherche, doit être proportionnée à la durée du tems.

Vous allez voir que l'on résout cette question sans une nouvelle méthode ; & qu'avec un peu de bon sens, il n'y a rien au monde de si simple. Faites ce raisonnement : si 1 heure produisoit 18 lieuës, 30 heures donneroient 30 fois 18 lieuës ; en ce cas on multiplieroit 30 par 18 & l'on auroit le produit 540 lieuës ; mais ce n'est pas là l'état de la question, en supposant que 1 heure donne 18 lieuës, vous avez supposé 12 fois trop, car ce sont 12 heures qui produisent 18 lieuës ; ainsi le produit 540, est 12 fois trop grand, il n'y a donc qu'à le rendre 12 fois plus petit ; c'est-à-dire, le diviser par 12, & le quotient 45 sera le nombre de lieuës que le voyageur fera en 30 heures.

En effet, à 18 lieuës en 12 heures, c'est une lieuë & demie par heure ; par conséquent, en 30 heures on aura 30 lieuës & 30 demie lieuës qui valent 15

lieuës ; or 30 & 15 = 45 : ainsi qu'on l'a trouvé ci-dessus.

On voit donc que pour résoudre cette question & d'autres semblables, *il faut multiplier les deux derniers termes 18 & 30 l'un par l'autre & en diviser le produit 540 par le premier 12 : le quotient de cette division donnera ce que l'on cherche.*

OPERATION.

12 heures 18 lieues. 30 heures.

```
Multiplication...  18
                   30
                  ----  | 12
Division. . . . . 540   | ---
                  48    | 45...nombre cherché.
                  ----
                  .60
                   60
                  ----
                   ..
```

On résout la question suivante en faisant le même raisonnement que ci-dessus.

QUESTION.

25 Louis m'ont produit 200 liv. en les commerçant. Combien m'auroient rapporté à proportion 75 Louis ?

RESOLUTION.

OPERATION.

25 louis. 200 liv. 75 louis.

```
   200
    75
  ----
  1000
 1400
 -----
 15000 | 25
 150   |----
 ----- | 600
 ...00
```

Dites si 1 louis m'avoit produit 200 liv. 75 louis m'auroient produit 75 fois 200 = 15000 liv. mais comme 1 louis ne m'a produit que la vingt-cinquiéme partie de 200 livres, suivant l'état de la question ; je ne dois donc prendre que la vingt-cinquiéme partie du produit 15000, c'est-à-dire diviser 15000 par 25. Le quotient 600 est le gain que j'aurois fait avec 75 louis. Cela doit être ; car 75 louis valent trois fois plus que 25 louis : ainsi, le produit de 75 louis, doit être 3 fois plus grand que celui de 25 louis. Or 25 louis donnent 200 liv. donc 3 fois 25 louis ou 75 louis doivent produire 3 fois 200 liv. = 600 liv. comme nous l'avons trouvé.

On pouvoit résoudre les deux questions précédentes sans calcul. Nous ne les avons choisies aussi simples que pour faire concevoir avec plus de facilité l'esprit de la Régle.

Voici encore une question semblable à la précédente.

QUESTION.

15 Hommes en un jour ont fait 25 toises d'un certain ouvrage : combien en auroient-t'ils fait à proportion s'ils avoient été 37 hommes ?

RESOLUTION.

Multipliez 25 par 37, & divisez le produit 925 par 15, le quotient sera 61 toises & $\frac{10}{15}$

OPERATION.

15 hommes. 25 toises. 37 hommes.

```
    25
    37
   ----
   175
   75
   ----
   925   | 15
   90    |----
   ----  | 61 toises.  10
    25                 --
    15                 15
   ----
    10
   ----
```

Voulez-vous sçavoir la valeur de $\frac{10}{15}$? Rappellez-vous que cela signifie 10 toises à diviser par 15 ; cela ne se peut. Réduisez les 10 toises en pieds. 1 Toise = 6 pieds ; ainsi 10 toises = 10 fois 6 pieds = 60 pieds qu'il faut diviser par 15, cela donne 4 pieds ; par conséquent 37 ouvriers auroient fait 61 toises 4 pieds d'ouvrage.

25. On pourroit considérer la Régle de trois ou de proportion sous un autre point de vuë qui n'est pas moins lumineux que le précédent, mais qui est peut-être plus naturel, parce que l'on n'est pas obligé de supposer ce qui n'est point.

EXEMPLE.

Un Jet fournit en 8 jours 96 muids d'eau : combien en fournira-t'il en 29 jours?

RESOLUTION.

Puisque ce Jet fournit 96 muids en 8 jours, il n'en fournira que la huitiéme partie en un jour. Divisez donc 96 par 8. Le quotient 12 indiquera que que ce Jet fournit par jour 12 muids d'eau ; par conséquent, en 29 jours il en fournira 12 fois 29 = 348 nombre cherché.

OPERATION.

8 jours. 96 muids. 29 jours.

Division. . . . . 96 | 8
8 | 12
16
16
..

Multiplication. . . 12
29
108
24
348 muids. Nombre cherché.

La Régle est donc, suivant notre raisonnement, *de diviser le second terme par le premier, & d'en multiplier le quotient par le troisiéme terme : le produit qui en résultera, sera le terme cherché.*

Résolvez ce même exemple par la premiere méthode que nous avons démontrée (n°. 24) vous trouverez le même produit 348.

26. Il y a un grand nombre de Régles de trois qui renferment cinq termes ; mais il est facile de les réduire à trois, & de les résoudre par conséquent en tenant la même conduite que ci-dessus.

EXEMPLE.

Je fais travailler à un ouvrage. 25 Ouvriers qui j'y employe m'ont couté en 8 jours 300 liv. combien faudroit-il que je payasse à 30 ouvriers qui y travailleroient 15 jours.

J'appelle *une journée* le travail d'un homme pendant un jour ; ainsi 25 ouvriers par jour me donnent 25 journées ; donc en 8 jours ils produiront 25 fois 8 journées = 200 journées. Les deux premiers termes 25 & 8 sont réduits au seul terme 200. Par la même raison 30 ouvriers en 15 jours produiront 15 fois 30 journées = 450 journées.

Voilà donc la question réduite à ces trois termes, 200 *Journées ont été payées* 300 *liv. combien faudra-t'il payer* 450 *journées ?* multipliez donc les deux derniers termes 300, 450 l'un par l'autre ; & divisez le produit 135000 par le premier terme 200. Le quotient 675 liv. exprimera ce que je dois payer (n°. 24)

OPERATION.

25 Ouvriers. 8 jours. 300 liv. 30 Ouvriers 15 jours.

1ere Réduction. $25 \times 8 = 200$.
2de Réduction. $30 \times 15 = 450$

Question réduite : 200 journées. 300 liv. 450 journées.

Multiplication. 450
300

Division. . . . 135000 | 200
675 nombre cherché.

Où vous voyez que l'on multiplie les deux derniers termes 300, 450 de la question réduite l'un par l'autre, & que l'on en divise le produit 135000 par le premier 200, comme on l'a exécuté précisément dans les questions à trois termes.

Autre Exemple semblable au précédent.

400 *Liv. en 6 mois ont produit* 48 *liv. combien produiront à proportion* 500 *liv. en* 8 *mois.* ?

RESOLUTION.

Considérez que 400 liv. qui travaillent pendant 6 mois produisent le même fruit que 6 fois 400 liv. pendant un mois ; car si vous faites agir 6 fois plus d'argent, d'un autre côté vous êtes 6 fois plus foible par le tems ; il y a compensation. En la place de 400 liv. en 6 mois, on peut donc substituer 6 fois 400 liv. ou 2400 liv. en un mois. Demême au

lieu de 500 liv. en 8 mois, vous pouvez prendre 8 fois 500 liv. ou 4000 liv. en un mois, & réduire par conséquent la question aux termes suivans; *2400 liv. produisent 48 liv. combien doivent rapporter à proportion 4000 liv. dans le même tems?* en multipliant les deux derniers termes 48, 4000 l'un par l'autre, & divisant leur produit 192000 par le premier terme 2400. le quotient 80. fera voir que 500 liv. en 8 mois rapporteront 80 liv. en suivant l'état de la question.

OPERATION.

400 liv. 6 mois. 48 liv. 500 liv. 8 mois.

1ere Réduction $400 \times 6 = 2400$ liv.
2de Réduction $500 \times 8 = 4000$ liv.

Question réduite : 2400 liv. 48 liv. 4000 liv.

Multiplication... 4000
48

Division. . . 192000 | 2400
19200 | 80 liv. nombre cherc.
.....0

Ce qui revient, comme voyez, aux cas les plus simples.

27. Mais quelquefois ces sortes de questions sont proposées de maniére qu'il faut multiplier les deux premiers termes, & diviser par le troisiéme : c'est le bon sens qui décide.

EXEMPLE.

300 Soldats en 12 jours doivent consommer une certaine quantité de Vivres. En combien de tems 200 Soldats feront-ils la même consommation ?

RESOLUTION.

Ce qu'un Soldat consomme en un jour, je l'appelle *une journée de bouche*. Il y a 300 Soldats, donc c'est par jour 300 journées de bouche. La provision est supposée durer 12 jours; on a donc 12 fois 300 = 3600 journées de bouche qui épuisent la provision ; mais d'un autre côté vous n'avez que 200 Soldats, qui ne produisent par jour que 200 journées de bouche : il s'agit donc de trouver un nombre, lequel multipliant 200, produise 3600 ; or en divisant 3600 *par* 200, on trouvera le nombre 18 qui fera voir que 200 hommes en 18 jours feront la même consommation que 300 hommes en 12 jours ; car 18 par 200 (c'est-à-dire le produit du quotient par le diviseur) donnent 3600 ; nombre de journées de bouche nécessaire à faire la consommation proposée.

Démontrons cette opération en d'autres termes. Puisqu'il faut 3600 journées de bouche pour consommer la provision, & que vous n'avez que 200 Soldats, c'est-à-dire, 200 journées de bouche par jour; afin d'épuiser ces Vivres, vous aurez besoin d'autant de jours que le nombre 200 est compris de fois dans 3600 ; & par conséquent vous diviserez le produit 3600 des deux premiers termes 300, 12 par le troisiéme terme 200, ainsi que nous l'avons exécuté.

Quand on remarquera qu'il s'agit de produire le

même effet, comme est ici la consommation d'une même quantité de Vivres, *On multipliera les deux premiers termes de la question l'un* par *l'autre ; & l'on on divisera le produit par le troisiéme* : cette Régle est générale & s'appelle *Régle inverse*.

Toutes ces questions se résolvent sans aucune Régle nouvelle, avec la multiplication & la division appliquées à propos on en vient à bout : je vais proposer encore quelques éxemples, afin que l'on s'accoutume à raisonner.

EXEMPLE.

En 50 jours 15 maçons construisent une maison ; en combien de jours 25 maçons la construiroient-ils ?

RESOLUTION.

15 maçons font par jour 15 journées de travail, ils travaillent 50 jours ; c'est donc 15 fois 50 journées = 750 journées employées à la construction de la maison. Mais, par la supposition, il y a d'un autre côté 25 maçons qui produisent 25 journées de travail par jour : éxaminez donc combien de fois 25 est compris dans 750, en divisant 750 par 25, le quotient 30 fera connoître que 25 maçons en 30 jours feront le même ouvrage que 15 maçons en 50 ; puisque de part & d'autre il y aura autant de journées, c'est-à-dire, 750 journées de travail.

Il n'y a pas plus de difficulté quand ces questions renferment 5 termes.

EXEMPLE.

Une provision suffit pour faire subsister 40 hommes pendant 50 jours, en leur donnant 30 onces par jour :

à combien devroit-on réduire ces onces par jour, s'ils falloit faire subsister 90 hommes pendant 70 jours avec la même provision.

RESOLUTION.

Faites toujours ce raisonnement. 40 Hommes pendant 50 jours font 40 fois 50 journées = 2000 journées. Chaque journée éxige 30 onces; c'est donc 30 fois 2000 = 60000 onces, en quoi consiste toute la provision qu'il faut distribuer à 90 hommes pendant 70 jours, c'est-à-dire, à 70 fois 90 journées = 6300 journées : divisez donc 60000 par 6300. Le quotient 9 & $\frac{3300}{6300}$ marquera que pour faire subsister 90 hommes pendant 70 jours, suivant l'état de la question proposée, on ne doit distribuer par jour à chaque homme que 9 onces & demie à peu près; car la quantité $\frac{3300}{6300}$ abrégée, donne $\frac{33}{63}$ (n°. 22) c'est-à-dire 33 onces qu'il faut partager en 63 parties, c'est un peu plus de la moitié d'une once.

OPERATION.

40 hommes. 50 jours. 30 onces. 90 hom. 70 jours.

1ere Réduction $40 \times 50 \times 30 = 60000$.
2de Réduction $90 \times 70 = 6300$.

Question réduite : 60000 onces. 6300 journées.

$$\text{Division.. } \begin{array}{r|l} 60000 & 6300 \\ \underline{56700} & 9.\ \frac{3300}{6300} \text{ ou } \frac{33}{63} \text{ nombre cherc.} \\ 3300 & \end{array}$$

Où vous voyez qu'il faut multiplier les trois pre-

miers termes 40, 50, 30 les uns par les autres, & en diviser le produit 60000 par celui des deux derniers 90, 70 = 6300, pour trouver dans le quotient de cette division le nombre 9 & $\frac{33}{63}$

28. Moyennant la Régle de proportion, on fait toutes sortes de *changes étrangers*. la science des changes étrangers consiste à trouver le rapport des poids ou des mesures d'un Pays avec celles d'un autre.

EXEMPLE.

200 *Lib. de Venise pesent* 140 *lib. de Lyon; combien* 500 *lib. de Venise pesent-elles de lib. de Lyon?* (*a*)

Il est clair que cette question se résout par une Régle de trois; ainsi multipliant les deux derniers termes, ou 140 par 500, & divisant le produit 70000 par le premier terme 200, le quotient 350 vous indiquera que 500 liv. de Venise pesent 350 de Lyon. (n°. 24)

Autre Exemple semblable au précédent.

21 *Aunes de Paris font* 27 *verges de Londres; combien* 35 *aunes de Paris feront-elles de verges de Londres?*

RESOLUTION.

Dites, puisque 21 aunes de Paris produisent 27 verges de Londres, combien 35 aunes de Paris en produiront-elles? La Régle de trois est simple. multipliez donc les deux derniers termes 27, 35 l'un par l'autre, divisez-en le produit 945 par le premier terme 21 (n°. 24) le quotient 45 vous fera

(*a*) La livre pésant est exprimée par le signe lib.

voir que 35 aunes de Paris font 45 verges de Londres.

Troisiéme Exemple de changes étrangers.

60. *Sols de France valent* 80 *deniers d'Hollande ; combien* 650 *deniers d'Hollande font'ils de sols de France ?*

RESOLUTION.

Disposez les termes de cet éxemple comme ils doivent être, en disant, puisque 80 *deniers d'Hollande valent* 60 *sols de France, combien* 650 *deniers d'Hollande valent-ils de sols de France ?* On voit encore que la Régle de trois est simple ; ainsi on multipliera les deux derniers termes 60, 650 l'un par l'autre ; & l'on en divisera le produit 39000 par le premier terme 80. Le quotient 487 & $\frac{4}{8}$ fera connoître que 650 deniers d'Hollande se réduisent à 487 sols $\frac{4}{8}$ ou a 487 sols & demi de France ; car 4 divisez par 8 donne une moitié de sols.

Regle de Compagnie ou de Societé.

29. Ceux qui sont dans le commerce ou dans la Finance, forment souvent des sociétés où chacun contribue, ainsi qu'il est convenu entr'eux. Le gain ou la perte doit donc être proportionnée aux mises particulieres. Celui qui a fourni trois fois plus, doit perdre ou gagner trois fois davantage, en supposant que le tems soit égal de part & d'autre : on sent déja par la simple exposition que les questions de cette nature doivent se résoudre par la Régle de proportion.

EXEMPLE.

Trois Marchands s'associent & composent un fonds de 30000 liv. avec lesquelles ils gagnent 12000 *liv. le premier met* 15000 *liv. le second* 9000 *liv. & le troisiéme* 6000 *liv. combien chacun doit-il avoir pour sa part?*

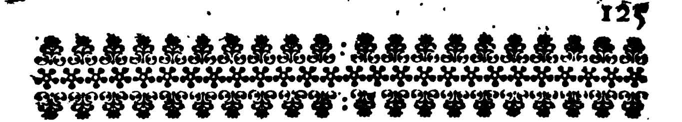
Chaque Marchand doit assurément retirer à proportion de l'argent qu'il a mis dans la société. Vous ferez donc autant de Régles de trois qu'il y a de Marchands ; ainsi vous direz, puisque 30000 liv. gagnent 12000 liv. combien 15000 liv. doivent-elles gagner ? Vous trouverez 6000 liv. pour la part du premier.

Après cela vous chercherez ce qui doit revenir au second, en disant toujours 30000 liv. donnent 12000 liv. combien 9000 liv. doivent-elles donner ? Elles produiront 3600 liv. au second associé.

Enfin vous raisonnerez demême par rapport au troisiéme associé. 30000 Liv. rapportent 12000. liv. combien 6000 liv. rapporteront-elles ? C'est 2400 liv. qu'il reviendra au troisiéme associé.

Je ne fais pas ce calcul ; ce seroit une diffusion inutile après tout ce que j'ai dit & fait dans les exemples précédens ; il suffit d'indiquer la voye. Dans le Chapitre suivant, où le calcul va devenir un peu plus compliqué, je ferai encore usage de la Régle de trois, afin que l'on soit bien convaincu qu'il n'y a presque point de Problême arithmétique que on ne puisse résoudre par la multiplication & la division.





CHAPITRE SECOND.

DES FRACTIONS.

30. LEs nombres sur lesquels nous avons opéré dans le chapitre précédent sont appellés *nombres entiers*, parce qu'ils contiennent 1 entierement ou plusieurs fois 1; mais on peut demander où l'on peut avoir besoin du quart de 1. du cinquiéme de 1, du septiéme de 1, &c. le septiéme d'une toise ou le cinquiéme d'un écu sont des quantités très-réelles.

Quand on divise une quantité en plusieurs parties égales; une ou plusieurs de ces parties s'appellent des *fractions* de cette quantité. Divisez 1 toise en 8 parties égales, chaque partie est une fraction de la toise & s'appelle un huitiéme de toise qui s'exprime ainsi $\frac{1}{8}$: cela signifie que la toise est divisée en huit parties égales dont on en prend une. Le nombre 8, qui est au-dessous de la petite ligne horisontale, est appellé *dénominateur*; à cause qu'il donne le nom à la fraction; il dit qu'elle exprime des huitiémes. On appelle *numérateur* le nombre supérieur 1; ce chiffre compte réellement les parties que l'on prend. Demême cette expression $\frac{4}{5}$ d'un pied signifie que le pied est divisé en cinq parties dont on en prend quatre. $\frac{9}{16}$ D'aune font comprendre que l'aune est divisée en seize parties dont on en prend neuf; & l'on s'énonce ainsi dans le discours par rapport à ces quantités, on dit *quatre-cinquiémes d'un pied, neuf-seiziémes d'aune, &c.*

31. Puisque les fractions sont des quantités ré-



elles, elles sont soumises aux mêmes combinaisons que les entiers ; nous pouvons donc les multiplier, les diviser, les ajouter, les soustraire : en effet on a besoin assez souvent dans le commerce de sçavoir la différence de $\frac{3}{4}$ à $\frac{2}{3}$ de connoître la somme de $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$ $\frac{7}{24}$

32. pour faire avec intelligence sur les fractions les opérations du chapitre précédent, rendons-nous attentifs à ce qui constitue une fraction : voyons ce que signifie les $\frac{3}{4}$ d'un écu.

Je remarque que les $\frac{3}{4}$ d'un écu sont précisément la même chose qu'un quart de trois écus ; car au lieu d'un écu, prenant trois écus, vous avez une quantité trois fois plus grande ; mais en revanche vous en prenez trois fois moins, puisqu'au lieu de trois quarts vous ne prenez qu'un quart : il y a compensation. Il faut s'attacher à bien comprendre ce principe, qui est ce me semble assez clair ; s'il est une fois bien conçu, toute la théorie ou tout l'artifice des fractions est entendu.

33. On dit que l'on *évalue* une fraction quand on détermine sa valeur en quantités connues. Suivant le principe établi (n°. 32) il n'y a rien de si simple que cette détermination. Vous sçavez que les $\frac{3}{4}$ d'un écu signifient le quart de 3 écus ; divisez donc 3 écus ou 9 liv. par 4, vous trouverez que 2 liv. 5 sols ou 45 sols sont les $\frac{3}{4}$ d'un écu.

On trouve donc généralement la valeur d'une fraction en divisant son numérateur par son dénominateur. $\frac{5}{6}$ d'une toise se détermineront en quantités connues, en divisant 5 toises ou 30 pieds par 6. le quotient 5 pieds sera la valeur de $\frac{5}{6}$ d'une toise ; ce que l'on apperçevoit même sans cette opération, un pied étant la sixiéme partie d'une toise.

34. Une fraction est donc une division indiquée ou une division à faire, dont le numérateur est le di-

vidende & le dénominateur est le diviseur. Or plus un dividende est grand, le diviseur restant le même, plus aussi est grand le quotient ou le résultat de la division; par conséquent plus le numérateur d'une fraction sera grand, son dénominateur étant toujours lemême, plus aussi la fraction sera grande. Par exemple, si le numérateur 2 de la fraction $\frac{2}{9}$ devient 3 fois plus grand, on aura la fraction $\frac{6}{9}$ trois fois plus grande que la fraction $\frac{2}{9}$: ce qui est clair.

En vous représentant toujours une fraction sous l'idée d'une division, rappellez-vous que plus un diviseur est grand, le dividende restant lemême, moins on a au quotient; en effet, plus il y a de monde à partager une quantité, moins il en revient à chacun; par conséquent plus le dénominateur deviendra grand, le numérateur restant lemême, plus la fraction sera petite. Vous avez la fraction $\frac{3}{4}$ de toise dont vous rendez le dénominateur 4 une fois plus grand sans toucher au numérateur; cela vous produit la fraction $\frac{3}{8}$ qui n'est que la moitié de la fraction $\frac{3}{4}$; car il est évident que 3 toises partagées à 4 donneront une fois plus qu'étant partagées à 8 : que l'on fasse attention à cet article, nous allons en faire usage.

De la Multiplication des Fractions.

35. On peut multiplier une fraction par un entier ou par une fraction.

1°. Si vous avez à multiplier $\frac{2}{9}$ par 4, il s'agit de rendre la fraction $\frac{2}{9}$ quatre fois plus grande. Vous direz donc 4 fois $\frac{2}{9} = \frac{8}{9}$, c'est-à-dire qu'il faut simplement multiplier le numérateur de la fraction sans toucher au dénominateur; car (n°. 34.) en rendant le numérateur d'une fraction quatre fois plus grand, la fraction devient quatre fois plus grande: il est évident d'ailleurs que $\frac{8}{9}$ valent quatre fois plus que $\frac{2}{9}$.

2°. Pour multiplier une fraction par une fraction, par exemple, $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, faites attention que $\frac{4}{5}$ sont précisément la même chose que la cinquiéme partie de 4. Multiplions d'abord $\frac{2}{3}$ par l'entier 4, nous aurons $\frac{8}{3}$; mais ce produit est 5 fois trop fort, car on ne propose pas de multiplier $\frac{2}{3}$ par 4; mais seulement par la cinquiéme partie de 4 qui vaut $\frac{4}{5}$: ainsi comme le produit $\frac{8}{3}$ est 5 fois trop fort, on rendra $\frac{8}{3}$ cinq fois plus petit en multipliant le dénominateur 3 par 5 pour avoir $\frac{8}{15}$ cinq fois plus petit que $\frac{8}{3}$ (n°. 34) & qui est par conséquent le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

Pour multiplier une Fraction par une Fraction, la regle est donc *de multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, le produit est le numérateur de la Fraction que l'on cherche, dont le dénominateur est aussi le produit des deux dénominateurs.*

Sur ce principe $\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{3 \times 6}{4 \times 7} = \frac{18}{28}$. De même $\frac{8}{9} \times \frac{5}{7} = \frac{8 \times 5}{9 \times 7} = \frac{40}{63}$ &c. Il n'y a rien de si aisé que la pratique de cette opération. La théorie n'en est pas plus difficile en se rappellant le n°. 34. Cette maniere de calculer est fort commode pour trouver tout d'un coup la Résolution de certaines questions qui paroissent d'abord assez difficiles. On seroit très-embarrassé sans ce calcul à déterminer à quoi se réduisent les deux tiers de trois quarts de quatre cinquiémes d'une aune : au lieu qu'en suivant la regle de la Multiplication des Fractions, on voit que les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5} = \frac{2 \times 3 \times 4}{3 \times 4 \times 5} = \frac{2}{5}$ d'aune, en faisant disparoître le 3 & le 4 du dessus & du dessous de la Fraction, parce que (n°. 21.) des quantités qui multiplient un nombre doivent être détruites par les mêmes quantités qui le divisent.

Je dis donc que les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ se déterminent en multipliant

multipliant tous les numérateurs les uns par les autres, & tous les dénominateurs aussi les uns par les autres, pour faire une nouvelle Fraction dont le numérateur soit le produit de tous les numérateurs & le dénominateur le produit de tous les dénominateurs. Démontrons-le par parties. 1°. Les $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ signifient $\frac{4}{5}$ prises $\frac{3}{4}$ de fois; ce qui se réduit à multiplier $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{4} = \frac{3\times4}{5\times4}$. 2°. On demande les $\frac{2}{3}$ du produit que nous venons de trouver, c'est-à-dire, qu'il faut prendre le produit $\frac{3\times4}{5\times4}$ deux tiers de fois ou le multiplier par $\frac{2}{3}$; ce qui donne, suivant la régle de la Multiplication des Fractions, $\frac{3\times4\times2}{5\times4\times3} = \frac{2}{5}$, comme nous l'avons déja déterminé.

Je ne fais qu'indiquer le calcul de la Multiplication; afin que l'on voye le procédé du calcul & les grandeurs qui se détruisent, ce qui en certaines rencontres abrége extrêmement le calcul; on doit y prendre garde.

Lorsqu'une Fraction est telle qu'aucun des nombres, qui composent son numérateur par voye de multiplication, n'est détruit par aucun de ceux qui en composent le dénominateur par la même voye, on dit que la Fraction est réduite à *sa plus simple expression*. Par exemple, $\frac{5}{7}$ est réduite à sa plus simple expression; au contraire, la Fraction $\frac{8}{12}$ n'y est pas réduite; car, si l'on développe les nombres qui en composent le numérateur & le dénominateur par voye de multiplication, on en trouvera qui se détruisent; puisque $\frac{8}{12} = \frac{4\times2}{6\times2} = \frac{4}{6}$, & même la Fraction $\frac{4}{6} = \frac{2\times2}{2\times3} = \frac{2}{3}$. Ainsi $\frac{8}{12}$ se réduit à $\frac{2}{3}$ qui est une expression beaucoup plus simple que $\frac{8}{12}$.

Or, pour trouver tout d'un coup les nombres les plus simples auxquels se réduit une Fraction, on voit qu'il faut déterminer la plus grande quantité commune qui multiplie, ou ce qui revient au même, qui divise éxactement le numérateur & le dénominateur de la Fraction ; par éxemple, dans la Fraction $\frac{8}{12}$ il est clair que 4 est le plus grand diviseur commun de 8 & de 12, puisque $\frac{8}{12} = \frac{2\times4}{3\times4}$.

Mais lorsque les nombres qui composent le numérateur & le dénominateur d'une Fraction sont plus considérables, on ne voit pas au premier coup ce plus grand commun diviseur. Pour sçavoir, par éxemple, que la Fraction $\frac{153}{162}$ se réduit à $\frac{17}{18}$, on est obligé de tâtonner : or on a trouvé une méthode qui sauve le tâtonnement, c'est-à-dire, par laquelle on trouve le plus grand diviseur commun des deux quantités, dont une Fraction est composée : nous allons exposer cette méthode.

Moyen de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

36. Pour trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres 162, 153, divisez le plus grand par le plus petit, c'est-à-dire 162 par 153 : il est clair que si 153 divisoit éxactement & sans reste le nombre 162; alors le nombre 153 seroit réellement le plus grand commun diviseur de 162 & 153, puisque 153 se divise aussi lui-même éxactement ; mais comme 162 divisé par 153 donne 1 au quotient avec un reste qui est 9, on divisera par ce reste 9 le nombre 153 le plus petit des deux nombres proposés, & la division se faisant éxactement, on est sur que 9 est le plus grand commun

diviseur des nombres 153, 162 : s'il y avoit eu encore un reste, on auroit continué à diviser le premier reste 9 par le second, & ainsi de suite en négligeant toujours les quotients jusqu'à ce que l'on eut trouvé un nombre qui eut opéré une division éxacte, & ce nombre auroit été le plus grand commun diviseur des deux quantités proposées.

DEMONSTRATION.

Voyez les équations A.

OPERATION.

(A) $162 = 153 \times 1 + 9$

$153 = 17 \times 9$

puisque 9 divise éxactement 153, & qu'il se divise éxactement lui-même; 9 divisera éxactement $153 + 9 = 162$; donc 9 est commun diviseur de 162 & 153.

On prouvera de plus que 9 est le plus grand commun diviseur de ces deux nombres si l'on fait voir que tout nombre divisant éxactement 162 & 153 divisera aussi éxactement le nombre 9. Car ce nombre, quelqu'il puisse être, divisant éxactement 162, divisera aussi éxactement $153 + 9 = 162$, & comme on suppose qu'il divise aussi 153, il est nécessaire qu'il divise 9, sans quoi il ne diviseroit pas tout le nombre $162 = 153 + 9$. Ainsi le nombre 9 est le plus grand commun diviseur des nombres 162, 153. C. Q. F. D.

Division des Fractions.

37. Une Fraction se divise ou par un nombre

entier, ou par une Fraction ; quelquefois aussi un entier est divisé, par une Fraction

1°. Pour diviser $\frac{4}{5}$ par 6 on doit faire attention qu'il s'agit de rendre la Fraction $\frac{4}{5}$ six fois plus petite : or on rend une Fraction six fois plus petite en rendant son dénominateur six fois plus grand sans toucher à son numérateur. (n°. 34.) Dites donc $\frac{4}{5}$ divisées par $6 = \frac{4}{5 \times 6} = \frac{4}{30}$ en multipliant simplement son dénominateur 5 par le diviseur 6.

En voulez-vous une démonstration bien palpable ? $\frac{4}{5}$ de toise signifient que la toise est divisée en cinq parties, dont on en prend quatre : or quand vous multipliez le dénominateur 5 par 6, la nouvelle Fraction $\frac{4}{30}$ fait voir que la même toise est divisée en 30 parties, dont on en prend aussi 4 : la toise qui n'étoit d'abord divisée qu'en 5 parties, l'étant en 30, est divisée en 6 fois plus de parties ; les parties sont donc 6 fois plus petites ; ainsi $\frac{4}{30}$ sont 6 fois plus petites que $\frac{4}{5}$. La Fraction $\frac{4}{5}$ est donc réellement divisée par 6 lorqu'elle devient $\frac{4}{30}$, c'est-à-dire, lorsque l'on multiplie son dénominateur 5 par 6.

2°. Si vous avez une Fraction à diviser par une Fraction, c'est-à-dire, si l'on vous demande, par exemple, combien de fois $\frac{3}{4}$ sont contenus dans $\frac{6}{7}$: faites ce raisonnement, si j'avois $\frac{6}{7}$ à diviser par l'entier 3, j'écrirois $\frac{6}{7 \times 3}$. Mais ce n'est pas par 3 qu'il faut diviser $\frac{6}{7}$, c'est par $\frac{3}{4}$ ou par le quart de 3 : ainsi en le divisant par 3, je l'ai divisé par une quantité 4 fois trop forte ; le quotient ou la fraction $\frac{6}{7 \times 3}$ est donc 4 fois trop petite : nous la rendrons donc 4 fois plus grande en multipliant son numérateur 6 par 4 pour avoir $\frac{6 \times 4}{7 \times 3}$ ou $\frac{24}{21} = 1 + \frac{3}{21} = 1 + \frac{1}{7}$ qui fait voir

que $\frac{3}{4}$ eſt contenu dans $\frac{6}{7}$ une fois plus un ſeptiéme de fois.

On voit donc qu'afin de diviſer une Fraction par une Fraction on doit multiplier en ſautoir, c'eſt-à-dire, en appliquant la régle à notre Exemple, que l'on doit multiplier le numérateur 6 de la Fraction à diviſer $\frac{6}{7}$ par le dénominateur 4 de la Fraction $\frac{3}{4}$ qui ſert de diviſeur, & le dénominateur 7 par le numérateur 3. Voici comment cela doit s'écrire : $\frac{6}{7}$ diviſées par $\frac{3}{4} = \frac{6}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{6 \times 4}{7 \times 3} = \frac{24}{21} = 1 + \frac{3}{21} =$ $= 1 + \frac{1}{7}$. Le ſautoir $\times$ montre que 4 doit multiplier 6 & 3 doit multiplier 7 ; en prenant bien garde que le produit du numérateur du dividende par le dénominateur du diviſeur doit compoſer le numérateur du quotient que l'on cherche, & que le produit du dénominateur du dividende par le numérateur du diviſeur, doit former le dénominateur de ce même quotient.

Remarquez que la fraction $\frac{24}{21}$ eſt devenue $1 +$ $+ \frac{3}{21}$ puiſque $\frac{24}{21}$ ſignifie la vingt & uniéme partie de 24 : or en diviſant 24 par 21 on trouve $1 + \frac{3}{21} =$ $= 1 + \frac{1 \times 3}{7 \times 3} = 1 + \frac{1}{7}$ dernier réſultat que nous avons trouvé.

Conſidérez encore combien il eſt commode d'indiquer les produits par les nombres qui les compoſent, quand on calcule des fractions ; car en écrivant $\frac{1 \times 3}{7 \times 3}$ au lieu de $\frac{3}{21}$, nous avons vu tout à coup que $\frac{3}{21}$ ou $\frac{1 \times 3}{7 \times 3}$ ſe réduit à $\frac{1}{7}$, le 3 qui diviſe anéantiſſant le 3 qui multiplie.

Suivant ce qui vient d'être établi $\frac{4}{5}$ à diviſer par $\frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{2 \times 2 \times 3}{5 \times 2} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$.

tout ce détail ne regarde que la démonstration : car dans la pratique $\frac{4}{5}$ divisé par $\frac{2}{3} = \frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$ ou $1 + \frac{1}{5}$.

3°. Pour diviser un entier par une Fraction, par exemple 8 par $\frac{3}{5}$, vous direz 8 divisé par $3 = \frac{8}{3}$, Fraction 5 fois plus petite que celle que l'on cherche, parce qu'il faut diviser 8 par le cinquiéme de 3 seulement ; on multipliera donc $\frac{8}{3}$ par 5 & le produit $\frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3}$ sera le quotient de 8 divisé par $\frac{3}{5}$. D'où il suit qu'un entier se divise par une Fraction en multipliant l'entier par le dénominateur de la Fraction, & divisant ce produit par le numérateur de la même Fraction.

Mais, dira-t'on peut-être, à quoi bon ce calcul ? est ce qu'il y a des circonstances où l'on soit obligé de diviser une Fraction par une Fraction ? A-t'on jamais proposé de diviser $\frac{4}{5}$ par la septiéme partie de 2 ou par $\frac{2}{7}$? Cela n'est pas rare.

EXEMPLE.

Les $\frac{3}{4}$ d'une étoffe valent les $\frac{5}{6}$ d'une autre étoffe ; combien $\frac{8}{9}$ de la premiere vaudront-elles de la seconde ?

RESOLUTION.

Cette question se résout par une regle de trois, où l'on sçait qu'il faut multiplier les deux derniers termes $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$ l'un par l'autre afin d'avoir le produit $\frac{5\times8}{6\times9}$ à diviser par le premier terme $\frac{3}{4}$. Ainsi l'on écrira $\frac{5\times8}{6\times9} \times \frac{3}{4} = \frac{5\times8\times4}{6\times3\times9} = \frac{5\times2\times4\times4}{3\times2\times3\times9} = \frac{5\times4\times4}{3\times3\times9} = \frac{80}{81}$; ce qui signifie qu'il ne s'en faut que de $\frac{1}{81}$ que les $\frac{8}{9}$ de la premiere étoffe ne valent une aune de la seconde, car ajoutant $\frac{1}{81}$ à $\frac{80}{81}$ on a $\frac{81}{81}$ ou la quatre-vingt uniéme partie de $81 = 1$. En effet 81 divisez par 81 donnent 1.

AUTRE EXEMPLE.

Les $\frac{2}{3}$ d'un Terrein suffisent à 6000 hommes pour s'y ranger en bataille ; combien y en rangeroit-on dans les $\frac{3}{4}$?

RESOLUTION.

C'est encore une Regle de trois. Dites, puisque $\frac{2}{3}$ reçoivent 6000 hommes ; combien $\frac{3}{4}$ en recevront-ils ? Multipliez 6000 par $\frac{3}{4}$, vous aurez $\frac{18000}{4}$ qu'il faut diviser par $\frac{2}{3}$ en écrivant $\frac{18000}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{54000}{8} =$ la huitiéme partie de 54000 ; c'est 6750 hommes que l'on pourroit ranger dans les $\frac{3}{4}$ de ce terrein. En voilà bien assez pour faire voir la nécessité de ce calcul.

On sera peut-être surpris de ce que je traite de la Multiplication & de la Division des Fractions sans avoir rien dit de leur Addition ni de leur Soustraction. C'est qu'en général l'Addition des Fractions est plus difficile que leur Multiplication ou leur division, qui vont même nous servir de principes pour faire cette opération.

De l'Additiou des Fractions.

38. Les Fractions dont on propose de faire l'Addition, ont une même dénomination ou en ont une différente.

1°. Quand elles ont une même dénomination, c'est l'opération du monde la plus simple. Qui ne voit pas en effet du premier coup que $\frac{1}{9}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{2}{9}$ sont $\frac{6}{9}$? de même que $\frac{2}{7}$ & $\frac{4}{7}$ font ensemble $\frac{6}{7}$? C'est-à-dire que *pour ajouter des Fractions qui ont une même dénomination, on fait simplement l'Addition de leurs numérateurs, & l'on écrit sous cette somme le dénominateur commun.*

Voulez-vous déterminer la somme des 4 Fractions $\frac{2}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{1}{15}$? Dites $\frac{2}{15}$ & $\frac{4}{15}$ font $\frac{6}{15}$ & $\frac{5}{15}$ font $\frac{11}{15}$ & $\frac{1}{15}$ font $\frac{12}{15} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{4}{5}$ (n°. 36.) cela est assez clair.

2°. Si les Fractions proposées n'ont pas une même dénomination, pourvu que l'on puisse la leur donner sans changer leur valeur, il est certain que l'on en trouvera la somme aussi facilement que si elles avoient un même dénominateur.

Or pour concevoir bien clairement comment une Fraction peut acquérir un nom différent sans changer de valeur, il ne faut que se rappeller ce principe *qu'une quantité devenue quatre fois plus grande n'a point réellement changé de valeur si on la rend quatre fois plus petite* : prenons la Fraction $\frac{2}{3}$, rendons-la 4 fois plus grande, c'est-à-dire, multiplions-la par 4, elle deviendra $\frac{8}{3}$ (n°. 35.) mais si nous rendons la Fraction $\frac{8}{3}$ quatre fois plus petite, c'est-à-dire, qu'on la divise par 4 ; elle deviendra $\frac{8}{12}$ (n°. 37.) $= \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{2}{3}$ telle qu'elle étoit auparavant.

39. Ainsi une Fraction dont on multiplie le numérateur & le dénominateur par un même nombre, ne change point de valeur. $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$. On pourra donc prendre $\frac{9}{15}$ en la place de de $\frac{3}{5}$ suivant que l'un paroîtra plus commode que l'autre.

Cela posé ; *pour trouver la somme des deux Fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$, vous leur donnerez la même dénomination en multipliant le numérateur & le dénominateur de la premiere Fraction $\frac{2}{3}$ par le dénominateur 4 de la seconde Fraction $\frac{3}{4}$, & le numérateur & le dénominateur de la seconde Fraction $\frac{3}{4}$ par le dénominateur 3 de la premiere Fraction $\frac{2}{3}$; l'on fera ensuite l'addition*

de ces deux Fractions réduites à la même dénomination. Voici le détail de cette opération : $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$
$= \frac{2\times4}{3\times4} + \frac{3\times3}{3\times4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}$.

Car il est évident que la fraction $\frac{2}{3} = \frac{2\times4}{3\times4}$ (n°. 39.) de même que la fraction $\frac{3}{4} = \frac{3\times3}{3\times4}$. Ainsi en la place des deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ qui n'ont pas une même dénomination, on peut prendre les fractions équivalentes $\frac{2\times4}{3\times4}$, $\frac{3\times3}{4\times3}$ ou $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, de même dénomination dont la somme est évidemment $\frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}$.

La somme des fractions $\frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{5\times8}{6\times8} + \frac{7\times6}{6\times8} =$
$= \frac{40}{48} + \frac{42}{48} = \frac{82}{48} = 1 + \frac{34}{48} = 1 + \frac{17}{24}$, car $\frac{34}{48} =$
$\frac{17\times2}{24\times2} = \frac{17}{24}$.

Il est aisé de voir pourquoi les Fractions $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ sont réduites en quarante-huitiémes ; car en multipliant d'abord le dessus & le dessous de la Fraction $\frac{5}{6}$ par 8, le nombre 6 est multiplié par 8, & lorsque l'on multiplie les deux nombres de la Fraction $\frac{7}{8}$ par 6 ; le nombre 8 est multiplié par 6 : or 6×8 ou 8×6 donne toujours le même produit 48.

En général dans quelqu'ordre que l'on multiplie plusieurs quantités entre elles, on aura toujours le même produit. Ainsi $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5 \times 2 \times 4 \times 3 = 120$. Cela paroît assez. Je ne m'arrête pas à le démontrer.

On n'est pas toujours borné à trouver la somme de deux Fractions ; on peut en avoir quatre, cinq, six, &c. dans ce cas, pour réduire les quatre Fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$, &c. à la même dénomination & en déterminer la somme, quand on agira sur une Fraction on en multipliera le dessus & le dessous par le produit de tous les dénominateurs des autres Frac-

tions. Ainsi agissant sur $\frac{1}{2}$ vous multiplierez son numérateur & son dénominateur par le produit $3\times5\times6$ de tous les dénominateurs des autres Fractions, ce qui donnera $\frac{1}{2}=\frac{1\times3\times5\times6}{2\times3\times5\times6}$; vous passerez à $\frac{2}{3}$ dont vous multiplierez le dessus & le dessous par le produit $2\times5\times6$ des dénominateurs des autres fractions d'où vous aurez $\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times5\times6}{3\times2\times5\times6}$. Vous tiendrez la même conduite à l'égard des deux autres fractions $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$; comme l'expression suivante le fait voir $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}=\frac{1\times3\times5\times6}{2\times3\times5\times6}+\frac{2\times2\times5\times6}{3\times2\times5\times6}+\frac{4\times2\times3\times6}{5\times2\times3\times6}+\frac{5\times2\times3\times5}{6\times2\times3\times5}=\frac{90}{180}+\frac{120}{180}+\frac{144}{180}+\frac{150}{180}$, fractions qui ont toutes la même dénomination ; car on voit que ce sont toujours les mêmes nombres qui concourent à former leur dénominateur : faisant enfin l'addition de tous les numérateurs on trouve que la somme de toutes les fractions proposées $=\frac{504}{180}=2+\frac{144}{180}=2+\frac{36\times4}{36\times5}=2\frac{4}{5}$.

40. On a besoin quelquefois de donner à un entier la dénomination d'une Fraction. On voudroit que 4 eut la même dénomination que $\frac{3}{7}$. Multipliez 4 par 7 dénominateur de la Fraction. Vous aurez 28 sous lequel posant 7; la quantité $\frac{28}{7}$ a la même dénomination que $\frac{3}{7}$, sans que ce nombre 4 devenu $\frac{28}{7}$ ait changé de valeur.

Car $\frac{28}{7}=\frac{4\times7}{7}$. Or nous avons vu qu'une grandeur multipliée & divisée en même temps par un même nombre demeuroit dans son premier état : effectivement $\frac{28}{7}$ valent la septiéme partie de $28=4$.

De même vous donnerez à 6 toutes les dénominations possibles sans changer sa valeur ; vous en ferez $\frac{12}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{30}{5}$, $\frac{36}{6}$, &c. & ainsi à l'infini sui-

vant le besoin ; c'est la même chose par rapport aux autres nombres. 1 peut devenir $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, &c. comme il est évident. Ces transformations de nombres entiers en Fractions méritent d'être considérées. Nous en ferons usage dans la Soustraction des Fractions.

Soustraction des Fractions.

39. Cette opération s'entend d'abord, quand les Fractions ont une même dénomination : *on ôte le plus petit numérateur du plus grand, & l'on écrit sous le reste le dénominateur commun.*

Demandez-vous la différence de $\frac{3}{8}$ à $\frac{7}{8}$, écrivez $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7-3}{8} = \frac{4}{8} =$ ainsi $\frac{4}{8}$ est la différence de $\frac{3}{8}$ à $\frac{7}{8}$: Remarquez que $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Car $\frac{4}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$, en effaçant ce qu'il y a de commun au numérateur & au dénominateur.

Quand les Fractions n'ont pas une même dénomination, on la leur donne après quoi l'on opére comme ci-dessus. On veut sçavoir de combien $\frac{5}{6}$ surpassent $\frac{3}{4}$? On écrira $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} - \frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \frac{20}{24} - \frac{18}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1 \times 2}{12 \times 2} = \frac{1}{12}$. C'est-à-dire que $\frac{5}{6}$ surpassent $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{12}$.

On ne voit pas toujours laquelle des deux Fractions est la plus grande ; par exemple, s'il falloit déterminer la différence de $\frac{7}{9}$ à $\frac{5}{6}$. Avant que de disposer les termes, comme ci-dessus, on donneroit à ces Fractions une même dénomination ; l'on auroit alors $\frac{7}{9} = \frac{42}{54}$ & $\frac{5}{6} = \frac{45}{54}$: par où l'on voit que $\frac{7}{9}$ est plus petit que $\frac{5}{6}$, puisque $\frac{42}{54}$, valeur de $\frac{7}{9}$, est une quantité plus petite que $\frac{45}{54}$ valeur de $\frac{5}{6}$. On écrira donc $\frac{5}{6} - \frac{7}{9} = \frac{45}{54} - \frac{42}{54} = \frac{3}{54} =$

$= \frac{3 \times 1}{3 \times 18} = \frac{1}{18}$, cela signifie que $\frac{1}{18}$ est la différence $\frac{5}{6}$ à $\frac{7}{9}$.

Pour retrancher une Fraction d'un entier, on donne à l'entier la dénomination de la Fraction proposée. Vous voulez retrancher $\frac{5}{8}$ de 1; écrivez $1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$, c'est la différence de $\frac{5}{8}$ à 1.

Quand il faudra soustraire une Fraction, accompagnée d'un entier, d'une autre Fraction aussi accompagnée d'un entier; si l'on veut sçavoir, par exemple, l'excès de $3 + \frac{5}{6}$ sur $2 + \frac{8}{9}$; on donnera aux entiers la dénomination des Fractions qui les accompagnent; ainsi l'on dira $3 + \frac{5}{6} = \frac{18}{6} + \frac{5}{6}$, dont on fera une seule quantité en ajoutant leurs numérateurs, ce qui produira $\frac{23}{6} = 3 + \frac{5}{6}$. On fera aussi une seule quantité de $2 + \frac{8}{9}$, & l'on trouvera que $2 + \frac{8}{9} = \frac{18}{9} + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}$. Après avoir ainsi préparé les quantités proposées on ôtera $\frac{26}{9}$ de $\frac{23}{6}$ en les réduisant à la même dénomination, comme il suit $\frac{23}{6} - \frac{26}{9} = \frac{23 \times 9}{6 \times 9} - \frac{26 \times 6}{6 \times 9} = \frac{207}{54} - \frac{156}{54} = \frac{51}{54} = \frac{3 \times 17}{3 \times 18} = \frac{17}{18}$; c'est l'excès de $3 + \frac{5}{6}$ sur $2 + \frac{8}{9}$; ce qui n'a besoin pour être compris que l'opération même.

Si on avoit plusieurs Fractions à soustraire de plusieurs Fractions, on feroit une somme de toutes les Fractions à soustraire, & une autre somme des autres Fractions dont on voudroit soustraire, après quoi l'on opéreroit comme ci-dessus.

EXEMPLE.

On propose de retrancher $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$.

RESOLUTION.

Faites une seule Fraction des deux Fractions $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$, vous aurez $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$. Faites la même chose des deux Fractions $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$, en disant $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20}$. Or puisque $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$ & $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{31}{20}$. La question se réduit à ôter $\frac{7}{6}$ de $\frac{31}{20}$. Ecrivez donc $\frac{31}{20} - \frac{7}{6} = \frac{186}{120} - \frac{140}{120} = \frac{46}{120} = \frac{23}{60}$, c'est-à-dire que $\frac{23}{60}$ est la différence de $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$.

On fera la même préparation lorsque l'on aura à multiplier ou à diviser plusieurs Fractions par plusieurs Fractions.

Montrons par quelques éxemples l'usage de l'Addition & de la Soustraction des Fractions.

Exemple d'Addition de Fractions.

Un Marchand a vendu dans la journée, 1°. 13 *aunes* $\frac{1}{2}$ *d'étoffe*. 2°. 9 *aunes* $\frac{5}{8}$. 3°. 7 *aunes* $\frac{1}{16}$. 4°. 18 *aunes* $\frac{3}{4}$; *combien a-t'il vendu en tout ?*

RESOLUTION.

Disposez les différentes ventes ainsi que vous le voyez.

OPERATION.

18	aunes	$\frac{3}{4}$
13		$\frac{1}{2}$
9		$\frac{5}{8}$
7		$\frac{1}{16}$
48		$\frac{11}{16}$

Et commencez par donner la même dénomination à toutes les Fractions. Il est facile de les mettre toutes en seixiémes ; vous aurez $\frac{31}{16} = 1 + \frac{11}{16}$, écrivez $\frac{11}{16}$ sous les Fractions, & retenez 1 aune que vous ajouterez aux entiers pour continuer l'Addition à l'ordinaire dont la somme sera 48 aunes $\frac{11}{16}$; où il faut remarquer que $\frac{11}{16} = \frac{8}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16}$. Desorte que le Marchand a vendu en tout 48 aunes & demie avec $\frac{3}{16}$ d'aune.

Exemple où la Soustraction de Fractions a lieu.

Des Ouvriers ont entrepris un ouvrage où il faut 602 toises $\frac{3}{4}$ de mur ; ils en ont déja construit 278 toises $\frac{7}{8}$. Combien en reste-t-il à faire ?

RESOLUTION.

On voit qu'il faut soustraire 278 $\frac{7}{8}$ de 602 $\frac{3}{4}$.

OPERATION.

602	$\frac{3}{4}$	ou $\frac{6}{8}$
278	$\frac{7}{8}$	
323	$\frac{7}{8}$	

Reduisez d'abord $\frac{3}{4}$ en huitiémes vous aurez $\frac{6}{8}$. Mais il n'est pas possible de retrancher $\frac{7}{8}$ de $\frac{6}{8}$: c'est pourquoi on ajoutera aux $\frac{6}{8}$ une toise que l'on mettra en huitiémes : or $1 = \frac{8}{8}$, lequel ajouté à $\frac{6}{8} = \frac{14}{8}$. Dites maintenant $\frac{7}{8}$ ôtées de $\frac{14}{8}$ donnent $\frac{7}{8}$. Ecrivez $\frac{7}{8}$ sous les fractions ; après quoi vous passerez à la soustraction des entiers ; mais, comme vous avez augmenté le nombre supérieur de 1 toise, au lieu d'ô-

ter 8 toises dans l'opération qui va suivre, on en ôtera 9, & l'on continuera la soustraction ainsi qu'il a été enseigné (n°. 16.) on doit trouver qu'il reste à faire 323 toises & $\frac{7}{8}$.

On doit s'éxercer beaucoup au calcul des Fractions : cette maniere de compter est d'un très-grand secours dans les Multiplications & les Divisions composées. Une *Multiplication composée* est celle où le multiplicande & le multiplicateur (ou simplement l'un des deux) sont composés chacun de quantités de différente espéce. Entendez la même chose de la *Division composée* par rapport à son dividende & à son diviseur.

De la Multiplication composée.

EXEMPLE.

40. *On demande à combien reviennent* 35 *aunes d'étoffe à* 24 *liv.* 15 *sols l'aune.*

RESOLUTION.

Sans faire d'abord attention aux 15 s. vous multiplierez 35 par 24 dont le produit est 840 liv.

OPERATION.

	35 aunes	
	à 24 liv.	15 sols l'aune.
	140	
	70	
	840 liv.	
pour 10 s. ...	17	10 s.
pour 5 s.	8	15
	866 liv.	5 s.

Après quoi vous chercherez ce que produiront 35 aunes à 15 sols l'aune. Considérez donc que 15 f. = 10 f. + 5 f. Prenons 35 aunes à 10 f. : il est certain que si 10 f. valoient 1 liv. 35 aunes vaudroient 35 liv. mais 10 f. ne font que la moitié d'une liv. par conséquent 35 aunes ne vaudront que la moitié de 35 liv. = 17 liv. 10 f. écrivez 17 liv. 10 f. dans la place qui leur convient, & comme l'opération le montre. Enfin vous prendrez la valeur de 35 aunes à 5 f. mais comme 35 aunes à 10 f. ont produit 17 liv. 10 f. il est évident que 35 aunes à 5 f. produiront la moitié de 17 liv. 10 f. = 8 liv. 15 que vous écrirez sous le produit précédent : vous ferez l'addition des différens produits, & vous trouverez que 35 aunes a 24 liv. 15 f. l'aune produiront 866 liv. 5 f. ce qui est démontré par le procédé même.

Cette maniere de multiplier s'appelle la Multiplication *par les parties aliquotes*. Les parties aliquotes d'une quantité sont celles qui divisent éxactement & sans reste la quantité dont elles sont parties. Ainsi 10 f. est une partie aliquote de la livre ; il en est la deuxiéme partie. 5 sols font la quatriéme partie de la livre ; 2 sols en font la dixiéme partie, & 1 sol en est la vingtiéme. Toutes ces parties sont donc des parties aliquotes de la livre ; mais 9 sols ou 7 sols ne font pas une partie aliquote de la livre, parce que 9 & 7 ne divisent par 20 sols (valeur de la livre) éxactement & sans reste : mais il est facile de transformer ces quantités en parties aliquotes de la livre ; car 9 f. = 4 f. + 5 f. parties aliquotes de la livre ; puisque 4 sols font éxactement le cinquiéme de une livre & 5 sols en font le quart.

AUTRE

AUTRE EXEMPLE.

Combien couteront 267 lib. 9 onces de Thé à 18 liv. 17 ſ. la livre?

OPERATION.

267 lib. 9 onces
à 18 liv. 17 ſ. la livre.

2136			
267.			
133	10 ſ.		pour 10 ſ.
66	15		pour 5 ſ.
26	14		pour 2 ſ.
9	8	6 den.	pour 8 onces.
1	3	6 $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$	pour 1 once.
5043 liv.	11 ſ.	$\frac{3}{4}$ den.	

Calculons d'abord comme ſi nous n'avions que 267 lib. de thé à 18 liv. 17 ſ. la livre. En multipliant 267 par 18, on aura les deux produits 2136, & 267 diſpoſez comme on le voit dans l'opération. Enſuite on prendra la valeur de 267 lib. à 17 ſ. la livre : Or 17 ſ. = 10 + 5 + 2. Ainſi nous dirons 267 lib. à 1 liv. vaudroient 267 liv. mais 10 ſ. n'étant que la moitié de 1 liv., on ne prendra donc que la moitié de 267 liv. = 133 liv. 10 ſ. par conſéquent la valeur de 5 ſ. ſera la moitié de 133 liv. 10 ſ. = 66 liv. 15 ſ. après quoi on prendra la valeur de 2 ſ. c'eſt la dixiéme partie de 1 liv. & par conſéquent la dixiéme partie de 267 liv. = 26 liv. 14 ſ. ce que l'on trouve très faci-

lement en doublant le dernier chiffre 7 = 14 que l'on écrira sous la colonne des sols, & mettant les deux chiffres 26 sous les livres. Dont la raison est que pour avoir la dixiéme partie de 267 liv. il est nécessaire que tous les chiffres deviennent 10 fois plus petits. Or en retranchant le dernier chiffre 7 les deux nombres 26 deviennent 10 fois plus petits : ils ne valent donc alors que 26 liv. & il reste le chiffre 7 dont il faut prendre la dixiéme partie = $\frac{7}{10}$ de livre ; mais le dixiéme de 1 liv. = 2 s. par conséquent $\frac{7}{10}$ = 2 fois 7 s. = 14 s. voilà pourquoi l'on double le dernier chiffre.

Cette abbréviation est fort commode quand on veut prendre la dixiéme partie d'une quantité de livres ; poursuivons notre opération. Il s'agit à présent de trouver la valeur de 9 onces = 8 + 1. Or 8 onces sont la moitié d'une livre pesant, & la livre pésant est supposée valoir 18 liv. 17 s. dont la moitié = 9 liv. 8 s. 6 den. que l'on écrira pour la valeur de 8 onces. Il reste la valeur de 1 once qu'il faut déterminer ; c'est la huitiéme partie de 8 onces ou de 9 liv. 8 s. 6 den. ainsi l'on dira la huitiéme partie de 9 liv. = 1 liv. il reste 1 livre = 20 s. lesquels ajoutez à 8 s. donnent 28 s. dont le huitiéme = 3 s. & il reste 4 s. = 48 den. lesquels ajoutez à 6 den. produisent 54 den. dont le huitiéme = 6 den. + $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$. On fera une addition de tous ces différens produits dont la somme sera 5043 liv. 11 s. $\frac{3}{4}$ den.

TROISIEME EXEMPLE.

Une toise d'ouvrage est payée 8 liv. 19 s. 11 den. combien faudra-t'il payer 12 toises 5 pieds 1 pouce 6 lignes.

OPERATION.

12 toiſ. 5 pieds 1 pouce 6 lignes
à 8 liv. 19 ſols 11 den. la toiſe.

96 liv.				
6				pour 10 ſ.
3				pour 5 ſ.
1	4 ſ.			pour 2 ſ.
1	4			pour 2 ſ.
.	6			pour 6 den.
.	3			pour 3 den.
.	2			pour 2 den.
4	9	11 den.	$\frac{1}{2}$	pour 3 pieds
2	19	11	$\frac{2}{3}$	pour 2 pieds
1	9	11	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$	pour 1 pied
.	2	5	$\frac{11}{12}+\frac{5}{72}=\frac{71}{72}$	pour 1 pouce
.	1	2	$\frac{1}{2}+\frac{71}{144}=\frac{143}{144}$	pour 6 lignes

115 liv. 12 ſ. 8 den. $\frac{21}{144}$ ou $\frac{7}{48}$

Ne conſidérons d'abord que les 12 toiſes à 8 liv. elles produiront 96 liv. enſuite pour avoir la valeur de 12 toiſes à 19 ſ. nous transformerons 19 ſ. en 10 + 5 + 2 + 2 = 19 ſ. & nous dirons 12 toiſes à 10 ſ. = 6 liv. à 5 ſ. = 3 liv. à 2 ſ. = 1 liv. 4 ſ. que l'on écrira 2 fois; après quoi on prendra la valeur de 12 toiſes à 11 den. = 6 +

OPERATION.

	298724	308
	2772	969 liv. 17 f. 8 den. $\frac{175}{308}$
	2152	
	1848	
	3044	
	2772	
Mult.	272	
	20	
	5440 f.	
	15	
Divif.	5455	
	308	
	2375	
	2156	
Mult.	219	
	12	
	438	
	219	
	2628 den.	
	11	
Divif.	2639	
	2464	
	175	

Commencez par diviser les livres à l'ordinaire, il viendra au quotient 969 liv. & il restera 272 liv. que l'on reduira en sols en les multipliant par 20; le produit sera 5440 s. auxquels ajoutant 15 s. proposés dans la question, on aura 5455 s. à partager à 308 personnes auxquelles il reviendra 17 s. que l'on écrira au quotient à côté des livres; & comme il reste 219 s. on les réduira en deniers en les multipliant par 12, ce qui produira 2628 den. auxquels joignant les 11 den. de la question, on aura 2639 den. à partager à 308 personnes; cela produira 8 den. que l'on écrira au quotient avec le reste 175 sous lequel on posera le diviseur 308, comme il est marqué dans l'opération : ensorte que chaque personne aura pour sa part 969 liv. 17 s. 8 den. $+ \frac{175}{308}$ de denier.

SECOND EXEMPLE.

58 marcs 5 onces coutent 875 liv. 5 s. 6 den. combien coute le marc ?

RESOLUTION.

On sçait que le marc = 8 onces; par conséquent en déterminant la valeur de 1 once, & prenant cette valeur 8 fois on aura la valeur du marc.

OPERATION.

Mult.	58	
	8	
	464	
	5	469 onces
	469 onc.	
Divis.	875 liv.	1 liv. 17 s. 3 den. $\frac{423}{469}$
	469	valeur de l'once qu'il faut multiplier par 8. Cette multiplication produit 14 liv. 18 s. 7 den. $\frac{101}{469}$ valeur du marc.
Mult.	406	
	20	
	8120	
	5	
	8125 s.	
	469	
	3435	
	3283	
Mult.	152	
	12	
	304	
	152.	
	6	
	1830 den.	
	1407	
Mult.	423	
	8	469
Divis.	3384	7 den. + $\frac{101}{469}$
	3283	
	101	

Réduisez donc 58 marcs en onces, c'est-à-dire

multipliez 58 par 8, & ajoutez les 5 onces de la question au produit 464 vous aurez 469 onces auxquelles vous partagerez comme ci-devant les 875 liv. 5 ſ. 6 den. vous trouverez que la valeur de l'once = 1 liv. 17 ſ. 3 den. $\frac{423}{469}$. Ainſi l'on multipliera cette valeur de l'once par 8, à cauſe que le marc = 8 onces. C'eſt-à-dire que l'on commencera par multiplier par 8 le numérateur 423 de la fraction $\frac{423}{469}$, dont le produit 3384 diviſé par le dénominateur 469 donnera 7 deniers $+ \frac{101}{469}$, après quoi l'on multipliera ſucceſſivement par 8 les 3 den. 17 ſ. 1 liv. qui compoſent la valeur de l'once. Tous ces produits réunis donneront pour la valeur du marc 14 liv. 18 ſ. 7 den. $+ \frac{101}{469}$ de denier.

TROISIEME EXEMPLE.

En 4 jours 17 heures une fontaine fournit 5234 lib. 9 onces 5 gros d'une eau que l'on ſuppoſe couler toujours avec la même vîteſſe; on demande combien cette fontaine fournit d'eau par jour?

RESOLUTION.

La livre péſant = 16 onces. L'once = 8 gros. Un jour = 24 heures. En déterminant donc ce qui s'écoule pendant une heure, il ſera facile de voir combien cette fontaine fournit d'eau par jour; elle en fournira 24 fois plus qu'en une heure.

OPERATION.

Mult. 24
4

96
17

113 heures

Divis. 5234 lib. | 113
452 | 46 lib. 5 onc. 1 gros $\frac{52}{113}$

714
678

Mult. 36 lib.
16

216
36.
9

Divis. 585 onc.
565

Mult. 20
8

160
5

Divis. 165
113

52

ce qui s'écoule pendant une heure : lequel produit multiplié par 24 donne 1111 lib. 12 onc. 3 gros $\frac{5}{113}$: c'est ce qui s'écoule pendant un jour.

Ainsi réduisez les 4 jours en heures vous trouverez que 4 jours 17 heures = 113 heures auxquelles vous partagerez les 5234 lib. 9 onces 5 gros, & chaque heure produira 46 lib. 5 onces 1 gros $\frac{52}{113}$ de gros : par conséquent comme un jour contient 24 heures on multipliera par 24 les 46 lib. 5 onc. 1 gros $\frac{52}{113}$ d'eau qui s'écoule pendant une heure pour avoir le produit 1111 lib. 12 onc. 3 gros $\frac{5}{113}$ de gros qui s'écoulent pendant un jour.

QUATRIEME EXEMPLE.

27 *Aunes & $\frac{5}{8}$ d'étoffe coutent* 1879 *liv.* 13 *s.* 9 *den. combien coute l'aune ?*

RESOLUTION.

On cherchera à combien revient la huitiéme partie d'une aune, & l'on multipliera cette valeur par 8 ; le produit sera évidemment la valeur de l'aune.

Vous réduirez donc en huitiémes les 27 aunes ; or nous avons vu (n°. 40.) que 1 aune = $\frac{8}{8}$ d'aune ; ainsi 27 aunes = 27 fois $\frac{8}{8}$ d'aune = $\frac{216}{8}$, lesquels ajoutez à $\frac{5}{8}$ donnent 221 huitiémes. Partagez donc 1879 liv. 13 s. 9 den. à ces 221 huitiémes le quotient 8 liv. 10 s. 1 den. + $\frac{64}{221}$ sera la valeur de la huitiéme partie d'une aune, & par conséquent en multipliant cette valeur par 8, on aura pour la valeur de l'aune entiere 68 liv. 10 den. + $\frac{70}{221}$.

OPERATION.

Mult.	27	
	8	
	216	
	5	
	221	221
Divis.	1879 liv.	8 liv. 10 s. 1 den. + $\frac{64}{221}$
	1768	valeur de la huitiéme partie d'une aune, laquelle multipliée par 8 donne 68 liv. 10 den. + $\frac{70}{221}$ valeur de l'aune.
Mult.	111 liv.	
	20	
	2220	
	13	
Divis.	2233 s.	
	221	
Mult.	23	
	12	
	46	
	23	
	276 den.	
	9	
Divis.	285 den.	
	221	
	64 den.	

Ou, ce que l'on trouvera peut-être plus commode, après avoir réduit les 27 aunes $\frac{5}{8}$ en $\frac{221}{8}$ on divisera la quantité 1879 liv. 13 f. 9 den. par la fraction $\frac{221}{8}$, ce qui se fait (n°. 37.) en multipliant d'abord 1879 liv. 13 f. 9 den. par le dénominateur 8 pour avoir le produit 15037 liv. 10 f. que l'on divise ensuite par le numérateur 221, ce qui donne au quotient 68 liv. 10 den. + $\frac{70}{221}$ de denier comme ci-dessus.

Je préférerois dans la pratique cette maniére de calculer à la précédente où l'on a vu qu'après avoir trouvé que la huitiéme partie de l'aune revient à 8 liv. 10 f. 1 den. + $\frac{64}{221}$, il a fallu multiplier tous les termes de cette derniere quantité par 8 pour trouver la valeur de l'aune, ce qui entraîne un plus grand détail; sur-tout lorsqu'il s'y rencontre une fraction, qui ne manque presque jamais.

Tout cela fait sentir l'importance du calcul des fractions auquel on doit être extrêmement éxercé non-seulement dans la pratique, mais dans la théorie qui a le merveilleux avantage de faire retrouver les régles quand on les a oubliées.

42. Je ne veux pas vous laisser ignorer un moyen de faire la multiplication & la division composée qui peut avoir son utilité en certains cas.

EXEMPLE.

4 Toises 5 pieds 9 pouces d'un ouvrage sont estimées 48 liv. 11 f. 9 den. à combien reviendront 7 toises 1 pied 5 pouces du même ouvrage?

RESOLUTION.

Cette question se résout par une régle de trois; elle éxige par conséquent que l'on fasse usage de la

multiplication & de la division composées ; puisque (n°. 24.) on doit multiplier les deux derniéres quantités, c'est-à-dire, 48 liv. 11 s. 9 den. par 7 toises 1 pied 5 pouces, & en diviser le produit par la premiére quantité 4 toises 5 pieds 9 pouces, mais nous allons ramener ces Opérations composées à des Opérations simples.

Pour cela réduisons chaque quantité à la plus basse espéce qu'elle renferme dans la question, c'est-à-dire, réduisons les toises & les pieds en pouces ; les livres & les sols en deniers. On sçait que la toise = 72 pouces, & que le pied en vaut 12 ; que la livre = 20 fois 12 deniers = 240 den.

Ainsi 4 toises, 5 pieds, 9 pouces = 357 pouces, 48 liv. 11 s. 9 den. = 11661 deniers. 7 toises, 1 pieds, 5 pouces = 521 pouces : par conséquent la question proposée se réduit à celle-ci : *357 pouces valent 11661 deniers ; combien faudra-t'il payer pour 521 pouces ?* où il n'y a plus de quantités de différente espéce.

On multipliera donc 11661 par 521, & on en divisera le produit 6075381 deniers par le premier terme 357, ce qui donnera 17017 den. + $\frac{312}{357}$ de denier pour la valeur de 7 toises 1 pied 5 pouces = = 521 pouces ; ensuite on déterminera par la division combien il y a de sols dans 17017 deniers : en divisant cette quantité par 12, on trouvera que 17017 deniers valent 1418 s. 1 den. lesquels réduits en livres donnent 70 liv. 18 s. 1 den. ensorte que 7 toises 1 pied 5 pouces valent 70 liv. 18 s. 1 den. + $\frac{312}{357}$ de denier.

En voilà bien assez, je pense, pour n'être plus embarrassé dans la résolution d'une division composée telle qu'elle puisse être.

Cependant je ne quitterai pas cet article sans expliquer certaines difficultés qui ne manquent pas

d'arrêter tous les calculateurs qui ne se sont pas rendus assez attentifs à la théorie du calcul.

Solution de quelques difficultés que l'on forme sur la Multiplication & sur la Division des Entiers & des Fractions.

43. Appliquons les difficultés à des Exemples. 1°. Une toise d'ouvrage coute 6 liv. combien couteront 5 toises ? Il est évident que l'on doit multiplier 6 liv. par le nombre 5 qui exprime les toises ; mais au lieu de 5 toises on peut, dit-on, substituer sa valeur en pouces, & prendre 5 fois 72 pouces = 360 pouces en la place de 5 toises, & multiplier 6 liv. par 360 pouces qui sont la même chose que 5 toises : or le produit de 6 liv. par 360 est très-différent du produit de 6 liv. par 5 : comment donc peut-il se faire qu'une même quantité multipliée par des valeurs égales ne donne pas le même produit ?

De même 1 s. = 12 den. par conséquent, dit-on encore, 1 s. multiplié par 1 s. doit donner la même chose que 12 deniers multipliés par 12 deniers ; cependant cela est très-faux : car 1 s. × 1 s. = 1 s. & 12 den. × 12 den. = 144 den. = = 12 s. produit 12 fois plus grand que le premier ?

En général la réponse, que l'on doit faire à ces sortes de difficultés, est que l'on ne multiplie point des toises par des livres ni des sols par des sols. Il faut se rendre attentif à ce que l'on prend pour unité ; c'est là-dessus que l'on régle la quantité de fois que l'on doit agir : ainsi dans la premiére question la toise étant prise pour l'unité : si 1 toise éxige 6 liv. il est évident que 5 toises éxigeront 5 fois 6 liv. or quand vous convertissez 1 toise en 72

pouces, le nombre 72 ne signifie pas 72 unités; mais seulement 72 soixante & douziémes de l'unité ou $\frac{72}{72}$, parce qu'un pouce est la soixante & douziéme partie de 1 toise : on fait donc un sophisme ou une lourde faute quand on substitue 72 pouces en la place de 1 toise pour multiplier ensuite par ces 72 pouces comme si c'étoient 72 unités; on oublie, qu'ayant pris une toise pour l'unité, 72 pouces ne sont réellement que $\frac{72}{72}$ de l'unité.

Calculons présentement suivant cette explication, on verra que nous retrouverons toujours le même produit soit que la multiplication se fasse par les toises, soit qu'elle se fasse par les pouces. Car 5 toises à 6 liv. la toise = 30 liv. au lieu de 5 toises prenons 360 pouces, c'est-à-dire $\frac{360}{72}$ de toise, & multiplions 6 liv. par ce nombre nous aurons $\frac{360\times6}{72}=\frac{2160}{72}$ ou la soixante & douziéme partie du nombre 2160; divisant donc cette quantité par 72 on trouve 30 comme auparavant.

C'est la même solution par rapport au second cas où l'on suppose que 1 s. × 1 s. ne produit que 1 s. Un sol est pris alors pour l'unité, & par conséquent un denier qui est la douziéme partie d'un sol doit être pris pour la douziéme partie de l'unité = $=\frac{1}{12}$: c'est pourquoi quand on multiplie 12 deniers par 12 deniers, on ne suit pas l'état de la question; c'est $\frac{12}{12}$ qu'il faut multiplier par $\frac{12}{12}$, ce qui produit $\frac{144}{144}=1$ résultat tout à fait égal au produit de 1 par = 1.

On voit donc que ces difficultés n'ont lieu que pour exercer l'esprit des autres, ou parce que l'on n'a pas soi-même l'esprit assez exercé.

2°. Quand on propose de diviser 12013 liv. à 35 personnes; pour déterminer le premier membre de

de la division la régle est de prendre autant de chiffres dans le dividende qu'il y en a au diviseur en cas que le diviseur puisse être compris dans ces chiffres du dividende.

Mais, quand cela n'arrive pas, de prendre un chiffre de plus au dividende qu'au diviseur : ainsi comme on voit que 35 n'est pas compris dans 12 qui sont les deux premiers chiffres du dividende 12013 liv. on prend les trois chiffres 120 qui déterminent alors le premier membre de la division. La raison, que l'on donne de ce procédé, est que 12 étant plus petit que 35, il n'est pas possible que 35 soit contenu dans 12.

A ce raisonnement on en oppose un autre qui forme une assez bonne difficulté. Il est vrai que 35 n'est pas compris dans 12 unités ; mais ces 12 pris du dividende signifient 12 milles = 12000 ; or il est évident que 35 est compris dans 12 milles : il y a plus 35 est contenu dans le premier chiffre 1 du dividende, puisque ce chiffre 1 = 10000. Cette premiere régle de la division n'est donc pas fondée sur une raison bien claire.

Il faut convenir que 35 est contenu dans le premier chiffre 1 du dividende mis sous la forme de 10000 ; mais ayant pris 1 dixaine de mille pour l'unité, l'expression 10000 ne signifie pas dix milles unités. Elle fait voir que vous avez rompu l'unité en ses 10000 parties égales, que vous pourriez, en effet, partager à 35 personnes ; & le quotient n'exprimeroit alors que des parties de l'unité, & non pas des dixaines de milles, puisqu'il n'y en a qu'une au dividende ; c'est pourquoi on rompt cette dixaine de mille en 10 milles que l'on joint aux 2 milles suivans pour avoir 12 milles à partager à 35 personnes : en cet état c'est 1 mille qui est pris pour l'unité ; or l'on ne sçauroit encore diviser ces

12 nouvelles unités par 35 : on les rompra donc en de plus petites parties ; celles qui ſuivent les milles ſont des cens : par conſéquent ces 12 milles ſeront transformés en 120 cens que l'on peut en cette qualité partager à 35 perſonnes ; puiſque, 1 cent étant pris pour l'unité, 120 cens composeront 120 unités dans leſquelles le diviſeur 35 eſt compris ; il viendra donc au quotient quelques-unes de ces unités, c'eſt-à-dire quelques cens.

C'eſt ainſi qu'en approfondiſſant la nature des nombres on léve les difficultés que leurs combinaiſons font naître, & que l'on ſe garantit de l'illuſion des premieres apparences.

3°. On a coutume de ſe perſuader que par la multiplication on augmente néceſſairement les nombres ſoumis à cette opération ; & l'on tombe dans quelque embarras quand on voit que le produit de 12 par $\frac{1}{3}$ donne 4 qui eſt plus petit que le nombre 12. De même que $\frac{3}{5}$ multiplié par $\frac{1}{4}$ produiſent $\frac{3}{20}$ grandeur quatre fois plus petite que $\frac{3}{5}$. Comment ſe fait-il que la multiplication diminue les nombres ſur leſquels elle agit ?

On s'attache un peu trop au ſon des mots. Conſidérons leur valeur. Qu'eſt-ce que c'eſt que multiplier ? C'eſt prendre un nombre autant de fois qu'une queſtion le demande : ſi l'on propoſe de multiplier par $\frac{1}{2}$ cela ſignifie qu'il faut prendre ce nombre une demi-fois ; le nombre multiplié devient donc une fois plus petit. Ainſi l'expreſſion $12 \times \frac{1}{3}$ fait connoître que l'on ne doit prendre 12 qu'un tiers de fois ; or le tiers de 12 eſt 4. Par conſéquent $12 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$, ainſi que la régle le preſcrit.

De même l'expreſſion $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$ indique qu'il faut prendre $\frac{3}{5}$ un quart de fois ou le quart de $\frac{3}{5}$. Or le quart de $\frac{3}{5}$ doit être plus petit que $\frac{3}{5}$. On ne doit donc plus être ſurpris que la multiplication donne



$\frac{3}{20}$, qui est un produit quatre fois plus petit que le nombre à multiplier $\frac{3}{5}$.

4°. Par opposition à ce que nous venons de dire il semble qu'un nombre divisé par un autre doit devenir plus petit ; cependant il n'est pas rare de trouver un quotient plus grand que son dividende : divisez 24 par $\frac{1}{5}$ vous aurez pour quotient 120 cinq fois plus grand que son dividende 24. Pareillement en divisant $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{9}$ on a le quotient 6 neuf fois plus grand que son dividende $\frac{2}{3}$.

Réduisons la question à sa juste valeur. Diviser 24 par $\frac{1}{5}$ c'est chercher combien de fois $\frac{1}{5}$ est compris dans 24. Or $\frac{5}{5}$ ou 1 est contenu 24 fois dans 24 ; donc $\frac{1}{5}$ y est contenu 5 fois davantage, c'est-à-dire 5 fois $24 = 120$. On voit donc pourquoi 24 divisé par $\frac{1}{5}$ donne un quotient 120 cinq fois plus grand que son dividende 24.

On fera un semblable raisonnement par rapport à $\frac{2}{3}$ divisés par $\frac{1}{9}$. Car $\frac{2}{3}$ divisés par $1 = \frac{2}{3}$, c'est-à-dire que $\frac{2}{3}$ contiennent 1 deux tiers de fois ; puis donc que $\frac{2}{3}$ divisés par 1 donne $\frac{2}{3}$, si l'on divise par une quantité 9 fois plus petite que 1, c'est-à-dire par $\frac{1}{9}$; on doit avoir au quotient 9 fois plus que $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3} \times 9 = \frac{18}{3} = 6$, comme on le trouve en effet en suivant les Régles.

5°. Il faut bien distinguer entre une division & un partage. On peut bien diviser tout ce que l'on partage ; mais l'on ne peut pas toujours partager ce que l'on divise. Si vous aviez 100 boisseaux de grain avec lesquels vous dûssiez ensemencer 4 arpens, en divisant ou en partageant 100 par 4, on auroit au quotient 25 boisseaux pour chaque arpent ; & le quotient seroit 50 si l'on partageoit les cens boisseaux à deux arpens : mais s'il n'y avoit qu'un arpent le partage cesseroit ; car le partage suppose nécessairement plusieurs.

On pourroit néanmoins faire la division; puisque 100 divisé par 1 = 100. Ce quotient exprimeroit encore 100 boisseaux; enfin celui qui proposeroit de partager 100 boisseaux à un $\frac{1}{2}$ arpent proposeroit une chose absurde, parce que si l'on ne peut pas partager à 1 arpent, à plus forte raison le partage n'aura pas lieu pour $\frac{1}{2}$ arpent : cependant quoiqu'il ne soit pas possible de partager 100 à $\frac{1}{2}$ arpent, ce n'est pas à dire que l'on ne puisse pas diviser 100 par $\frac{1}{2}$, ou déterminer combien de fois $\frac{1}{2}$ est contenu dans 100; le quotient est 200; mais en ce cas ce quotient ne signifie pas 200 boisseaux; il fait voir seulement que $\frac{1}{2}$ est contenu 200 fois dans 100.

Remarquons donc combien le calcul est une machine admirable, puisqu'il conduit même à la vérité l'esprit faux & l'esprit imbécile malgré les illusions de l'un & la stupidité de l'autre.

Comme les Citoyens d'un état bien policé sont déterminés au bien général, malgré leurs penchans vicieux; que l'esprit invisible, qui préside à la constitution des loix, les met dans l'heureuse impuissance de faire le mal; les Régles de calcul ou en général les Régles de Mathématiques sont aussi une quintessence de la raison tellement ajustée à la commodité publique que quand ceux qui font une Régle, manquent d'intelligence, la Régle a de l'esprit ou de la raison pour eux.

Fin du Calcul Arithmétique.

DE L'ALGEBRE.

CHAPITRE PREMIER.

44. Les nombres, que nous avons calculés jusqu'à présent, ont été employés à l'expression d'une certaine quantité. Sans nous embarrasser des choses exprimées par les chiffres, nous n'avons eu égard qu'à leur nombre; par exemple, le nombre 8 a été calculé sur le pied d'un signe qui exprime une chose prise huit fois : quelque puisse être cette chose dont le nombre 8 a été soumis au calcul.

En effet que ce nombre 8 représente des toises, des lieuës, des poids, des mouvemens, des siécles, &c. cela ne fait rien à l'opération ni même à son résultat; car si vous avez 8 à multiplier par 4 vous aurez toujours 32, soit que 8 représente des toises, soit qu'il exprime des écus ou toute autre chose.

Ainsi le nombre 8 ou tout autre nombre est à la vérité déterminé par sa quantité; mais il est totalement indéterminé par rapport à ce qu'il signifie, & cette indétermination ne s'oppose à aucunes des combinaisons dont il est susceptible.

Ne pourroit-on pas pousser l'indétermination plus loin? Ne voit-on pas, sans aucun effort, qu'une quantité quelconque multipliée par 12 devient 12 fois plus grande qu'avant la multiplication? que dans ce dernier état, si on la divise par 3, elle ne sera plus que le tiers de sa valeur; qu'en un mot elle deviendra plus petite ou plus grande, à pro-

portion des accroissemens ou des diminutions que son nombre multiplicateur ou diviseur pourra recevoir.

Les quantités indéterminées sont donc susceptibles de toutes les opérations du calcul ; & l'on appelle *Algébre* la Science qui enseigne le calcul de ces quantités indéterminées.

On est convenu que les lettres de l'alphabet *a*, *b*, *c*, *d*, *x*, *y*, *z*, &c. seroient les chiffres ou les signes de ces grandeurs indéterminées. On a donné à ces lettres le nom de *quantités Algébriques*.

45. Les quantités algébriques étant indéterminées, il a fallu inventer des *signes* pour en représenter les différentes opérations : c'est pourquoi on est convenu que le signe + marqueroit une addition, & le signe — une soustraction : ainsi l'expression $a + b$ signifie que la quantité b est ajoutée à la quantité a, & l'expression $p - m$ fait connoître que m est retranchée de p.

Pour s'exprimer avec plus de facilité dans le discours quand on veut énoncer le signe +, on dit *plus*. En voyant $a + b$ on prononce *a plus b* ; & l'on appelle *moins* la petite ligne horisontale —. La quantité $p - m$ s'énonce par *p moins m*.

Les signes Algébriques précédent toujours les quantités sur lesquelles on opére. Ainsi dans l'expression $p - m$ le signe — précéde la quantité m qui est retranchée.

Les quantités Algébriques précédées du signe + sont appellées *positives* : & l'on appelle *négatives* celles qui sont précédées du signe —. La quantité $a + b$ montre que $+ b$ est une positive, & l'on voit dans $p - m$ que $- m$ est une négative.

Toute quantité, qui commence une expression Algébrique sans être précédée d'aucun signe, est toujours supposée être positive ou être précédée du

signe +. L'expression $p - m$ est la même que + $p - m$: on ne supprime le + que parce que cela ne peut jamais faire d'équivoque.

46. Pour multiplier une quantité Algébrique par une autre, on les joint ensemble sans aucun signe ; ainsi $a\,b$ signifie que a est multiplié par b. L'expression $b\,c\,d$ fait connoître que les trois quantités b, c, d sont multipliées les unes par les autres. De même $a\,a$ signifie a multiplié par a. Quelque fois on se sert du signe $\times$ pour indiquer la multiplication : ce signe $\times$ tient la place des mots *multiplié par* : ainsi $a \times b = a\,b$ signifie que a multiplié par b donne $a\,b$ ou est égal à la quantité $a\,b$.

47. Suivant ce que nous venons de dire, on doit écrire une lettre autant de fois qu'elle se multiplie : $a \times a \times a \times a = a\,a\,a\,a$: mais afin d'abréger on ne l'écrit qu'une fois en mettant un peu au dessus & à sa droite le chiffre qui indique combien de fois on la suppose écrite, c'est-à-dire, qu'au lieu de $a\,a\,a\,a$ on écrit a^4, le chiffre 4 est appellé l'*exposant* de la quantité a, de même $a\,a\,a\,a\,b\,b\,b$ doit s'écrire $a^4\,b^3$.

48. Le produit d'une quantité par elle-même s'appelle la *seconde puissance* ou *le second degré* de cette quantité. $a\,a$ ou a^2 est la seconde puissance ou le second degré de a : souvent $a\,a$ ou a^2 est nommé le *quarré* de la quantité a. On dit qu'une quantité est élevée à *sa troisiéme puissance* ou *à son troisiéme degré* quand elle est multipliée par son second degré. $a \times a^2 = a^3$ qui est la troisiéme puissance de a. Le produit a^3 est aussi appellé quelquefois *le cube* de a : en un mot une quantité est toujours du degré ou de la puissance qu'indique son exposant : a^7 fait voir que a est élevé au septiéme degré, parce que l'on prend pour premier degré d'une grandeur la grandeur elle-même.

49. Les nombres qui précédent les grandeurs

Algébriques s'appellent *coefficiens*. Dans l'expression $3\ b\ c$ le nombre 3 est le coefficient du produit $b\ c$: il fait voir que la quantité $b\ c$ est prise trois fois. De même dans l'expression $4\ d$ la quantité d a pour coefficient le nombre 4. Quand une grandeur Algébrique n'est précédée d'aucun chiffre, il y faut toujours supposer le coefficient 1 ; $b\ c$ est la même chose que $1\ b\ c$: on y fera attention : la suppression du coefficient 1 n'a lieu que pour simplifier le calcul.

50. Il faut bien prendre garde à ne pas confondre les coefficiens avec les exposans. $3\ d$ est fort différent de d^3 ; car si l'on suppose $d = 5$ on aura $3\ d = 15$, & $d^3 = d \times d \times d = 5 \times 5 \times 5 = 125$, ce qui est fort différent de 15. En un mot le coefficient marque le nombre de fois qu'une grandeur est ajoutée à elle-même, & l'exposant fait voir combien de fois elle est multipliée par elle même.

51. Le signe de la division Algébrique est une petite ligne horisontale entre le dividende que l'on met au-dessus, & le diviseur que l'on met en dessous. Pour marquer que a est divisé par b, on écrit $\frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction.

52. Une quantité Algébrique dont les parties sont liées par les signes $+$ ou $-$ est appellée *compléxe* ou *polinôme* : ainsi $3\ a\ b + 2\ b\ c - 4\ c\ d$ est une quantité compléxe. Les parties de cette quantité, qui sont séparées par les signes $+$ ou $-$, s'appellent les *termes* de cette quantité ; par conséquent cette quantité à trois termes dont $3\ a\ b$ en est un, $2bc$ en est un autre, &c.

53. On appelle *monôme* toute quantité Algébrique qui n'a qu'un terme. La quantité $2\ b\ c$ est un monôme si elle n'est accompagnée d'aucun autre terme. Le calcul des quantités compléxes Algébriques n'étant qu'un calcul de monômes répété autant

de fois qu'il en est besoin ; l'ordre demande que nous commencions les opérations Algébriques par le calcul des monômes.

54. Les deux premieres opérations de l'Algébre, l'addition & la soustraction sont fondées totalement sur les deux observations suivantes.

1°. Une grandeur Algébrique est dite *semblable* à une quantité Algébrique qui a précisément les mêmes lettres & le même nombre de lettres. 5 *a b d* est semblable à la grandeur 2 *a b d*. L'expression 5 *a b d* fait voir que le produit *a b d* est pris 5 fois, & 2 *a b d* signifie que le même produit *a b d* est pris 2 fois, ainsi le produit *a b d* est pris en tout 7 fois : on peut donc écrire 7 *a b d* au lieu de 5 *a b d* & 2 *a b d*. D'où l'on voit déja que l'on peut rendre plus simple une expression Algébrique qui contient des termes semblables.

Pour reconnoître facilement les quantités Algébriques semblables on ne doit point faire attention à leur coefficient ; mais il faut écrire les lettres dans l'ordre de l'alphabet. Quoique 2 *b a d* soit la même chose que 2 *a b d* ou que 2 *d b a* ; cependant on aura une grande attention à ne point renverser l'ordre de l'alphabet, & d'écrire 2 *a b d* au lieu de 2 *b a d* ou de 2 *d b a* : cela sert à rendre le calcul plus clair : 5 *a b d* & 2 *a b d* paroissent plutôt des grandeurs semblables que 5 *b a d* & 2 *d b a* qui sont pourtant la même chose que les précédentes. Les quantités $3b^2c$ & b^2c sont aussi des grandeurs semblables : mais les grandeurs $4a^3f$ & $2a^3$ ne sont pas semblables, quoiqu'elles ayent de commun l'expression a^3, parce qu'il est essentiel aux grandeurs semblables d'avoir les mêmes lettres & le même nombre de lettres.

2°. Les quantités positives sont opposées directement aux quantités négatives qui leur sont sem-

blables : ainsi ces quantités se détruisent réciproquement. Si la positive va en haut en partant d'un certain point, la négative descend du même point en bas. Quand l'une marque la droite, l'autre marque la gauche. Le gain est-il exprimé par la positive ? la perte le sera par la négative. Enfin si ce que l'on posséde est du positif, ce que l'on doit est du négatif.

Par conséquent les quantités négatives sont aussi réelles que les positives. Toute leur différence consiste à agir en sens contraire, $+ 2bc$ & $- 2bc$ se réduisent à rien : celui des deux qui a le plus de force l'emporte sur l'autre. Un homme fait effort contre un vent impétueux avec une force de 30 lib. mais il est repoussé directement en sens contraire par une force de 35 lib. l'effort de cet homme est réduit à moins que rien, car il est obligé de reculer ; puisque son action contre le vent étant exprimée par $+ 30$, la répulsion du vent doit l'être par $- 35$; or $+ 30$ & $- 35$ se réduisent à $+ 30 - 30 - 5 = - 5$, c'est-à-dire 5 lib. au-dessous de rien ; car en donnant à cet homme 5 lib. de force au-dessus de ce qu'il en a, il ne produiroit encore rien en avant ; il ne feroit que se soutenir contre l'impétuosité du vent. Ainsi pour marquer la supériorité de l'un sur l'autre on retranchera le plus petit du plus grand, & on donnera au reste le signe du plus grand.

Ces opérations tombent toujours sur les coefficiens ; il est évident que $+ 5df$ & $- 3df$ se réduisent à $+ 2df$ ou à $2df$ (n°. 45.) puisque $+ 5df$ montre que la quantité df est prise 5 fois, & $- 3df$ fait connoître que la même quantité df est retranchée 3 fois ; or une même quantité prise 5 fois & ôtée 3 fois se réduit à n'être prise que 2 fois.

Pareillement $+5fm$ & $-6fm$ se réduisent à $-1fm$ ou simplement à $-fm$: car $-6fm$ est la quantité fm ôtée 6 fois & $+5fm$ est la même quantité fm remise 5 fois ; la quantité fm reste donc négative encore une fois & est par conséquent $-fm$.

De la Réduction des quantités Algébriques à leur plus simple expression.

55. On ne réduit que les grandeurs qui sont semblables, ainsi $5bc + 3bc$ se réduisent à $8bc$ en écrivant une seule fois la grandeur Algébrique bc précédée de la somme 8 des coefficiens 5 & 3.

De même la quantité $-3a^2b - 4a^2b$ devient $-7a^2b$; ce qui est évident (n°. 54.) car $-3a^2b - 4a^2b$ signifie la quantité a^2b retranchée 3 fois, & la même quantité retranchée 4 fois ; c'est donc la quantité a^2b retranchée 7 fois $= - -7a^2b$.

Ainsi pour réduire à leur plus simple expression les grandeurs semblables qui sont affectées du même signe : on prend la somme de leurs coefficiens audevant de laquelle on écrit le signe commun — si elles ont toutes le signe —, ou l'on écrit + quand elles sont affectées de ce signe que l'on supprime cependant, lorsqu'il y a d'autres termes qui suivent (n°. 45.).

Mais quand les grandeurs semblables Algébriques ont des signes differens on ôte le plus petit coefficient du plus grand, & l'on écrit devant le reste le signe du plus grand. $+4cm - 6cm$ se réduit à $-2cm$, en ôtant 4 de 6, & mettant le signe — du plus grand coefficient devant le reste $-2cm$ (n°. 54.) ; car si un homme posséde 4 louis, & qu'il en doive 6, il s'en faudra 2 louis

qu'il n'ait rien ; ainsi pour marquer cet état au-dessous du rien on écrit — 2 louis.

De même $4\,cd - 3\,cd$ devient $= +1\,cd$ ou simplement $= cd$, en supprimant le signe + & le coefficient 1 qui ne peuvent jamais causer aucune méprise lorsque la quantité Algébrique est seule ou qu'elle fait le commencement d'une suite de termes (n°. 45. & 49.).

Du Calcul des monômes ou des quantités Algébriques qui n'ont qu'un seul terme.

DE L'ADDITION DES MONOMES.

56. Pour ajouter la quantité a à la quantité b on écrit ces grandeurs de suite avec le signe + de l'addition, c'est-à-dire que b avec a donne $a + b$. De même si l'on vouloit joindre la quantité $-m$ avec p on écriroit $p - m$, écrivant ces quantités telles qu'on les donne, positivement si elles sont positives & négativement quand elles sont négatives.

Lorsque les grandeurs Algébriques sont semblables, on les réduit à leur plus simple expression. $3\,b$ ajouté à $2\,b$ s'écrit $3\,b + 2\,b = 5\,b$. De même $8\,cd$ auquel on joint $-10\,cd$ devient $8\,cd - 10\,cd = -2\,cd$ (n°. 55.).

De la Soustraction des monômes.

57. Quand on veut ôter une quantité Algébrique d'une autre quantité Algébrique, on écrit ces quantités de suite en changeant simplement le signe de la grandeur à soustraire : l'on fait ensuite la réduction si ces quantités sont semblables. Ainsi pour ôter $+c$ de b on écrit $b - c$, puisque — est le signe de la soustraction ; cela ne produit aucune difficulté.

Mais pour ôter $-b$ de a on écrit $a+b$ en changeant le signe $-$ en $+$, enforte que la quantité a eſt augmentée par cette ſouſtraction. On n'en voit pas d'abord la raiſon : mais conſidérez qu'un homme, à qui l'on ôte des dettes, augmente en facultés ; ſon fonds eſt réellement augmenté d'une quantité égale à la dette qu'on lui a ſupprimée. Oter des *moins* c'eſt donc réellement donner des *plus*. En effet un homme à 100 liv. & il doit 5 liv. ſon état eſt $100-5=95$, vous voulez qu'il n'y ait pas -5, c'eſt-à-dire que vous voulez lui ôter ſes dettes ; de 95 il montera donc à 100, & par conſéquent il ſera augmenté de 5 ; ainſi ôter des *moins* c'eſt donner des *plus*.

Faites encore attention que l'on n'ôte pas d'une grandeur ce qui n'y eſt point. Ainſi quand on propoſe de retrancher $-b$ de a il faut néceſſairement ſuppoſer que $-b$ accompagne a en ſecret ou d'une maniére enveloppée : je m'apperçois donc que a eſt la même choſe que $a+b-b$; or s'il faut ôter $-b$ de cette derniere expreſſion elle devient $a+b$: par conſéquent en ôtant $-b$ de a on doit auſſi avoir $a+b$.

De la Multiplication des monômes.

58. Nous avons déja dit (nº. 46.) que l'on multiplioit une grandeur Algébrique par une autre en écrivant ces quantités les unes à côté des autres ſans aucun ſigne ; ainſi $a\times b=ab$. $cd\times m=cdm$; c'eſt une convention : mais les grandeurs Algébriques ſont preſque toujours précédées de coefficiens & des ſignes $+$ ou $-$. En ce cas 1°. $+3cd\times+5bm=+15bcdm$; en diſant $+\times+$ donne $+$, enſuite 3×5 donne 15 ; enfin $cd\times bm$ produit $bcdm$; enſorte que $+15bcdm$ eſt le produit de $+3cd\times+5bm$.

OPERATION.

$$\begin{array}{c} +3cd \\ \times \\ +5bm \\ \hline +15bcdm \end{array}$$

2°. Si vous avez une grandeur négative à multiplier par une grandeur positive, le produit doit être affecté du signe —.

OPERATION.

$$\begin{array}{c} -2bd \\ \times \\ +3af \\ \hline -6abdf \end{array}$$

Ainsi $-2bd \times +3af = -6abdf$; vous direz donc $- \times +$ donne —. Après cela $2\times 3 = 6$ que l'on écrira à la suite du signe —; & $bd \times af = abdf$. Ainsi le produit total de $-2bd \times +3af$ est $-6abdf$. Ou l'on voit que $- \times + = -$. Nous en donnerons la raison un peu plus bas.

3°. Le produit d'une grandeur positive par une grandeur négative doit aussi être affecté du signe —; c'est pourquoi $+4rs \times -bd = -4bdrs$.

OPERATION.

$$\begin{array}{l} +\ 4rs \\ \times \\ -\ bd \\ \hline -\ 4bdrs \\ \hline \end{array}$$

Ce que l'on détermine en disant $+$ multiplié par $- = -$. 4×1 (que l'on suppose toujours précéder la quantité qui n'en est pas accompagnée ; n°. 49.) donne 4, enfin $rs \times bd = bdrs$. Ainsi le produit de $+ 4rs$ par $- bd = - 4bdrs$; ce qui suppose que $+ \times - = -$, nous allons bien-tôt le démontrer.

4°. Deux grandeurs négatives ou affectées du signe $-$ donnent $+$ à leur produit lorsqu'elles se multiplient. $- 3b \times - 4d = + 12bd$; & c'est ce qui ne paroît pas aisé à concevoir : comment *moins* par *moins* peut-il donner *plus* ? Examinons comment les signes agissent les uns sur les autres.

Démonstration.

La multiplication des coefficiens ne fait aucune difficulté. Ce sont des nombres qui se multiplient comme dans l'Arithmétique : celle des quantités Algébriques est de pure convention. Il n'y a donc que la multiplication des signes qui mérite une bonne explication ; il faut prouver que $+ \times + = +$ que $+ \times - = -$. Que $- \times + = -$. Que $- \times - = +$.

1°. $+ 3 \times + 4$ doit donner $+ 12$; car le multiplicateur $+ 4$ étant affecté du signe $+$ montre qu'il faut prendre la quantité $+ 3$ posi-

tive autant de fois qu'il eſt marqué par 4, c'eſt-à-dire qu'il la faut prendre 4 fois telle qu'elle eſt, or 4 fois $+3 = +3 +3 +3 +3 = +12$ ainſi $+ \times + = +$.

2°. $+3 \times -4 = -12$. Remarquez que le multiplicateur 4, étant affecté du ſigne $-$, fait connoître qu'il faut retrancher la grandeur $+3$ quatre fois. Or pour retrancher du poſitif, il faut mettre du négatif (n°. 57.), on écrira donc $-3 -3 -3 -3 = -12$, d'où l'on voit pourquoi $+ \times - = -$.

3°. $-3 \times +4 = -12$; car le multiplicateur 4 étant poſitif ſignifie qu'il faut prendre -3 quatre fois, & par conſéquent écrire $-3 -3 -3 -3 = -12$: ainſi $- \times + = -$.

4°. $-3 \times -4 = +12$. On doit toujours ſe régler ſur le ſigne du multiplicateur; ſon ſigne étant négatif, le multiplicateur -4 indique qu'il faut retrancher -3 quatre fois. Or pour ôter $-$ on écrit $+$ (n°. 57.) donc pour ôter -3 quatre fois on écrira $+3 +3 +3 +3 = +12$; il eſt donc bien clair que $- \times - = +$; ce n'eſt pas à l'apparence qu'il faut s'en tenir; on doit toujours remonter à la valeur fondamentale des ſignes C. Q. F. D.

Indépendamment de la démonſtration que l'on vient de voir, on peut encore ſe convaincre que $- \times - = +$. Multiplions $+8 -3$ par $+6 -2$; nous devons trouver le produit 20, puiſque $8 - 3 = 5$ & $6 - 2 = 4$, & qu'ainſi $5 \times 4 = 20$: appliquons les régles que nous venons de preſcrire.

OPERATION.

OPERATION.

$$\begin{array}{l} +8-3 \\ \times \\ +6-2 \\ \hline +48-18 \\ \quad\;\; -16+6 \\ \hline 48+6-18-16=54-34=20 \end{array}$$

Multiplions successivement les deux termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur : on peut commencer par où l'on voudra ; je commence à multiplier $+8-3$ par le premier chiffre $+6$ du multiplicateur : je dis donc $+\times+=+$. $8\times6=48$. Ensuite $-\times+=-$. $3\times6=18$. Ainsi le produit de $+8-3$ par $+6$ est $+48-18$. Passons au produit de $+8-3$ par -2. Disons $+\times-=-$. $8\times2=16$. Après cela $-\times-=+$. $3\times2=6$. Le produit de $+8-3$ par -2 est donc $-16+6$. Cherchons présentement la somme des deux produits que nous venons de trouver, en mettant ensemble les deux grandeurs positives $+48+6$ pour avoir $+54$, faisons aussi une somme des deux grandeurs négatives $-18-16=-34$. Le produit total est donc $54-34=20$, ainsi qu'on devoit le trouver ; & comme nous avons observé dans cette multiplication les Régles que nous avons prescrites (n°. 58.) il s'ensuit que ces Régles sont non-seulement infaillibles ; mais que l'on tomberoit inévitablement dans l'erreur, si l'on y dérogeoit.

59. On peut donc établir une Régle générale

très-simple pour la multiplication des signes. *Toutes les fois que les quantités, qui se multiplient, ont le même signe, on écrira* + *au produit*; (puisque + × + = +; & que — × — = +; *mais on écrira* — *quand elles auront des signes différens*; car + × — = —; & — × + = — (n°. 58.);

De la Division des Monômes.

60. Dans la division Algébrique la régle des signes + & — est la même que celle de la multiplication. Les coëfficiens se divisent comme dans l'Arithmétique. Pour les quantités Algébriques on fait disparoître au dividende les lettres qui lui sont communes avec le diviseur, & l'on écrit le reste au quotient. Si le diviseur n'a rien de commun avec le dividende, on écrit le dividende au-dessus d'une petite ligne horisontale sous laquelle on pose le diviseur, & la division Algébrique est faite. Appliquons ceci à des exemples.

Il s'agit de diviser + 12 *bcd* par + 3 *d*. Disposez ces quantités comme dans la division Arithmétique.

OPERATION.

+ 12 *bcd*	+ 3 *d*. . . .	diviseur
	+ 4 *bc*. . . .	quotient

Et dites + divisé par + = +, écrivez + au quotient sous la ligne. Ensuite 12 divisé par 3 donne 4, posez 4 au quotient; enfin *bcd* divisé par *d* = *bc* que vous écrirez au quotient à la suite du coefficient 4. En supprimant, comme vous voyez, du dividende *bcd* la lettre *d* qui est com-

mune au diviseur $3d$, on écrit au quotient le reste bc du dividende.

Et ceci n'est pas une convention, c'est une suite nécessaire de ce qui a été convenu par rapport à la multiplication des grandeurs Algébriques; car la multiplication étant directement contraire à la division, il faut que l'une détruise ce que l'autre établit; ainsi bcd étant la même chose que la quantité bc multipliée par d, si l'on divise par d le produit bcd, on doit faire disparoître l'effet de la multiplication, & par conséquent avoir au quotient la grandeur bc; c'est donc une nécessité d'écrire au quotient ce qui reste du dividende après que l'on a effacé ce qu'il a de commun avec le diviseur.

Pour vous faire voir que le quotient $+ 4bc$ est le vrai quotient, comme nous sçavons que le produit du quotient par le diviseur doit être égal au dividende: multiplions le diviseur $+ 3d$ par le quotient $+ 4bc$, le produit $+ 12bcd$ est précisément le dividende; ainsi le quotient trouvé est éxact.

Divisons $+ 15acf$ par $- 5af$. Suivant ce que nous avons établi, le quotient doit être $- 3c$. Voyons-le par parties.

OPERATION.

$$+ 15acf \;\Big|\; \frac{- 5af}{- 3c}$$

Disons $+$ divisé par $-$ donne $-$. 15 divisé par 5 donne 3. acf divisé par $af = c$. Le quotient est donc $- 3c$; car en multipliant le diviseur $- 5af$ par ce quotient $- 3c$ on a le dividende $+ 15acf$, ce qui prouve la justesse de l'opération.

Remarquez, avant que d'aller plus loin, que dans l'Arithmétique le quotient est aussi ce qui reste du dividende après que l'on en a ôté ce qu'il a de commun avec le diviseur. Divisons 100 par 25. On ne voit pas d'abord ce que 100 a de commun avec 25 : mais $100 = 25 \times 4$, & ce dernier dividende a 25 de commun avec le diviseur 25 ; cette quantité disparoîtra donc, & l'on écrira 4 au quotient ; en effet 100 divisé par $25 = 4$: voilà pourquoi il est souvent fort utile d'indiquer les multiplications par le signe x ; parce que, si dans la suite du calcul les produits doivent être divisés par des quantités qui ayent des racines communes avec le dividende, on fait disparoître ces racines communes, & le calcul en devient moins embarrassé. Quelquefois même le calcul se trouve fait par la seule indication. Voulez-vous avoir tout d'un coup le quotient du triple de 75 divisé par 15, écrivez $\frac{15 \times 5 \times 3}{5 \times 3} = 15$ en effaçant les racines 5, 3 communes au dividende & au diviseur.

Ce qui fait que l'on ne peut pas toujours opérer dans la division Arithmétique comme dans l'Algébrique ; c'est que l'on ne voit point les racines d'un dividende Arithmétique, sur-tout quand ce dividende est considérable ; au lieu que l'on a sous les yeux tous les *produisans* ou toutes les racines d'un monôme Algébrique : vous ne voyez pas sur le champ les racines qui ont concouru à produire le nombre 672 ; mais les racines du produit abc sont évidentes ; & c'est une des raisons qui rend le calcul Algébrique beaucoup plus expéditif que celui des nombres. Continuons nos divisions Algébriques.

On propose de diviser $-18a^2b^3g$ par $+3abg$. On doit trouver pour quotient $-6ab^2$.

OPERATION.

$$-18a^2b^3g \,\Big|\, \frac{+3abg}{-6ab^2}$$

Car — divisé par + = —. 18 divisé par 3 = 6. a^2b^3g divisé par abg est la même chose que $aabbbg$ divisé par abg, par conséquent en effaçant les trois lettres a, b, g que le dividende a de communes avec le diviseur; le reste abb ou ab^2 doit être écrit au quotient qui est par conséquent $-6ab^2$; ce que l'on prouve en multipliant le diviseur $+3abg$ par ce quotient — $-6ab^2$; car cette multiplication redonne le dividende $-18a^2b^3g$.

Pour diviser $-24c^3d^4f$ par $-8c^2d^3f$, on dira — divisé par — = +. Ensuite 24 divisé par 8 = 3. Enfin c^3d^4f divisé par c^2d^3f = $= cd$. Ensorte que le quotient de cette division est $+3cd$; car le diviseur $-8c^2d^3f$ multiplié par le quotient $+3cd$ redonne le dividende $-24c^3d^4f$.

OPERATION.

$$-24c^3d^4f \,\Big|\, \frac{-8c^2d^3f}{+3cd}$$

Par-tout ce que nous avons dit on seroit porté à se persuader qu'une quantité Algébrique divisée par elle-même devroit produire rien; puisque la régle est d'effacer au dividende ce que le dividende & le diviseur ont de commun; cependant abc di-

visé par *abc* ne donne pas zero. Le quotient $=1$; toutes les lettres disparoissent véritablement, ainsi que le prescrit la Régle : mais il faut toujours supposer qu'une grandeur Algébrique est précédée du coefficient 1; ainsi $\frac{abc}{abc}=\frac{1\times abc}{1\times abc}=\frac{1}{1}=1$.

En effet diviser *abc* par *abc* c'est déterminer combien de fois *abc* est contenu dans *abc*; or toute grandeur est contenue une fois dans elle-même : ainsi $\frac{abc}{abc}=1$. Donc en général une quantité quelconque divisée par elle-même donne toujours 1 au quotient.

Quand le dividende & le diviseur n'ont rien de commun, ou qu'ils ont seulement quelques quantités communes, on indique alors la division sous la forme d'une fraction. Ainsi $3ac$ divisé par $5bs=$ $=\frac{3ac}{5bs}$. De même $6df$ à diviser par $4ds=$ $=\frac{6df}{4ds}=\frac{2d\times 3f}{2d\times 2s}=\frac{3f}{2s}$, en exterminant la quantité $2d$ qui est un produisant ou une racine commune au dividende & au diviseur.

Vous observerez que c'est la même chose dans la division Arithmétique. Il n'est pas possible d'éxécuter une division à moins que le dividende & le diviseur n'ayent des racines communes. On ne sçauroit diviser éxactement 17 par 5, parce que le nombre 17 n'a aucunes racines communes avec 5. C'est pourquoi afin de faire cette division en partie, on agit sur 17 comme étant $15+2$ ou la premiere partie $15=3\times 5$ a le nombre 5 de commun avec le diviseur 5; la division de cette premiere partie se fait donc éxactement : elle donne 3 au quotient; il reste la seconde partie 2 qui n'a plus rien de commun avec 5; on est par conséquent

obligé d'indiquer cette opération sous la forme de la fraction $\frac{2}{5}$; ainsi 17 divisé par $5 = 3 + \frac{2}{5}$.

Tout ceci mérite quelque considération : on a le plaisir de voir que l'Algébre se conduit sur les mèmes principes que l'Arithmétique, que les procédés de ces deux sciences bien développés se réduisent au même, & qu'il n'y a entre elles qu'une légére différence de forme.

Du Calcul des Polinômes ou des quantités compléxes Algébriques.

Ce Calcul est seulement plus long que celui des monômes ; mais il n'est pas plus difficile, puisque ce n'est qu'un calcul de monômes répété autant de fois qu'il en est besoin.

De l'Addition des Polinômes.

61. Soit le polinôme $3a^2b^3 - 5cs^4 - 4dr + 2s$ que l'on propose d'ajouter au Polinôme $-s + 4cs^4 - a^2b^3 + 4dr$.

OPERATION.

$$\begin{array}{rrrr} 3a^2b^3 & -5cs^4 & -4dr & +2s \\ -a^2b^3 & +4cs^4 & +4dr & -s \\ \hline 2a^2b^3 & -cs^4 & * & +s \\ \hline \end{array}$$

L'on écrira d'abord l'un de ces Polinômes tel qu'il est donné : l'on disposera ensuite l'autre Polinôme sous celui que l'on vient d'écrire de maniére que les termes semblables soient directement les uns sous les autres. On tirera une ligne sous ces

Polinômes ainsi disposés, & réduisant successivement les termes semblables à leur plus simple expression (n°. 55.) on trouvera que la somme de ces deux Polinômes est $2a^2b^3 - cs^4 + s$ en mettant une petite étoile ou un zero sous les termes qui se détruisent totalement. Le procédé de cette addition n'est pas différent de celui des Monômes; il ne faut donc pas une nouvelle démonstration.

Quand les Polinômes n'ont pas de termes semblables, on les écrit les uns à la suite des autres indifféremment avec les signes qui les accompagnent : ainsi $3a^2b - 3ab^2 + b^3$ ajouté au Polinôme $xx - 2cx$, ou il n'y a aucuns termes semblables à ceux du premier, donne la somme $xx - 2cx + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$, dans laquelle le terme $3a^2b$ est accompagné du signe $+$ qu'on lui avoit simplement supposé avant l'addition, parce qu'étant à la tête d'une suite de termes, cela ne pouvoit causer aucune équivoque.

De la Soustraction des Polinômes.

62. On disposera, comme dans l'opération précédente, les termes semblables les uns sous les autres avec cette seule différence que l'on changera tous les signes de la grandeur à retrancher en des signes contraires, c'est-à-dire, que l'on mettra $-$ où il y aura $+$, & le signe $+$ où l'on verra le signe $-$.

Pour retrancher le Polinôme $- 2acx + 3cxx + 4a^3m - 5a^3b$ (A) du Polinôme $7cxx - 4a^3b + 5a^3m - acx + bd$ (B).

OPERATION.

$$\begin{array}{l} 7cxx - 4a^3b + 5a^3m - acx + bd \text{ (B)} \\ -3cxx + 5a^3b - 4a^3m + 2acx \text{ (A)} \\ \hline 4cxx + a^3b + a^3m + acx + bd \\ \hline \end{array}$$

On disposera les termes du Polinôme A sous les termes du Polinôme B; les termes semblables sous les termes semblables en changeant tous les signes du Polinôme A en des signes contraires; puisque (n°. 57.) ôter + c'est produire —, & soustraire — c'est donner +. Cette préparation faite, on réduira les termes semblables à leur plus simple expression. Cette réduction donnera $4cxx + a^3b + a^3m + acx + bd$ qui est la différence cherchée.

Si le Polinôme à retrancher n'a point de termes semblables à ceux du Polinôme dont on veut retrancher, on changera simplement les signes de la grandeur à soustraire; après quoi on écrira cette quantité à la suite du Polinôme dont on fait la soustraction. On veut retrancher $xx - 2cx + cc$ de $2a^4 - 3b^2$. Ecrivez $2a^4 - 3b^2 - xx + 2cx - cc$, en changeant simplement les signes de la grandeur $xx - 2cx + cc$ qui n'a aucuns termes semblables à ceux de la quantité $2a^4 - 3b^2$.

De la Multiplication des Polinômes.

63. Il faut multiplier, comme dans l'Arithmétique, tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur : on cherche ensuite la somme de tous ces différens produits en réduisant les quantités semblables, s'il y en a.

OPERATION.

$$\begin{array}{l} aa - 2ac + cc \\ \times \\ a - c \\ \hline a^3 - 2a^2c + ac^2 \\ \quad - a^2c + 2ac^2 - c^3 \\ \hline a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3 \\ \hline \end{array}$$

Pour multiplier $aa - 2ac + cc$ par $a - c$; on écrira le multiplicateur $a - c$ ſous le multiplicande $aa - 2ac + cc$, & tirant une ligne, on dira $aa \times a = a^3$, on écrira a^3 en ſupprimant le ſigne $+$. Enſuite on multipliera le terme ſuivant $- 2ac$ par a en diſant $- \times + = -$. $2ac \times a = 2a^2c$; on écrira donc $- 2a^2c$ à la ſuite de a^3. On continuera de multiplier $+ cc$ par a afin d'avoir $+ ac^2$ que l'on mettra à la ſuite de $- 2a^2c$ ſous la ligne; & ſi le multiplicande contenoit un plus grand nombre de termes; on ne finiroit pas de multiplier par a, à moins que tous les termes du multiplicande n'euſſent été multipliés par ce premier terme du multiplicateur. Quand le premier terme du multiplicateur a fait ſon office, on fait agir de même le ſecond terme $- c$ ſur tous les termes du multiplicande: ainſi l'on dira $aa \times - c = - a^2c$ que l'on écrira ainſi qu'il eſt marqué dans l'opération; on multipliera enſuite $- 2ac$ par $- c$ en diſant $- \times - = +$. $2ac \times c = 2ac^2$; le produit de $- 2ac$ par $- c$ eſt donc $+ 2ac^2$. Enfin $+ cc \times - c = - c^3$. Tous les termes du multiplicande ayant été multipliés par chaque terme du multiplicateur, on tirera une ligne ſous

les produits qui en sont venus, & faisant la réduction de ces produits, on trouvera que le produit total est $a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3$.

On voit par cet éxemple que l'on ne multiplie jamais qu'un monôme par un monôme : ainsi la multiplication des polinômes est plus longue ; mais elle n'est pas différente de celle des monômes : c'est pourquoi je vais simplement proposer encore quelques éxemples sur lesquels on pourra s'exercer.

PREMIER EXEMPLE.

$$\begin{array}{llll} 3aa & -\ 2bb & & \\ & \times & & \\ 3aa & +\ 2bb & & \\ \hline 9a^4 & -\ 6a^2b^2 & & \\ & +\ 6a^2b^2 & -\ 4b^4 & \\ \hline 9a^4 & \quad * & -\ 4b^4 & \\ \hline \end{array}$$

SECOND EXEMPLE.

$$\begin{array}{lllll} 3bc^2 & -\ 4b^2c & +\ b^3 & & \\ & \times & & & \\ 2bc & -\ 3b^2 & & & \\ \hline 6b^2c^3 & -\ 8b^3c^2 & +\ 2b^4c & & \\ & -\ 9b^3c^2 & +\ 12b^4c & -\ 3b^5 & \\ \hline 6b^2c^3 & -\ 17b^3c^2 & +\ 14b^4c & -\ 3b^5 & \\ \hline \end{array}$$

Nous avons déja fait remarquer qu'en certaines rencontres il étoit très-commode d'indiquer seulement le calcul de la multiplication sans la faire ;

parce qu'il peut arriver dans une suite de combinaisons que la même quantité soit diviseur d'un produit dont elle est racine, dans ce cas on fait disparoître cette quantité sans aucun calcul, ce qui rend l'opération plus simple.

Si l'on prévoit donc qu'il soit utile d'indiquer par éxemple la multiplication de $3xx - 2bc$ par $5cx - 4rs$; on écrira ce produit de cette maniére $\overline{3xx - 2bc} \times \overline{5cx - 4rs}$. La ligne qui est tirée sur le multiplicande & sur le multiplicateur fait voir que tous les termes du multiplicande doivent être multipliés par chaque terme du multiplicateur.

De la Division des Polinômes.

64. Disposez le dividende & le diviseur suivant l'ordre qui a été prescrit pour la division Arithmétique; mais par rapport à l'arrangement des termes vous suivrez les degrés d'une lettre commune au dividende & au diviseur; par éxemple on vous propose de diviser $c^3 + 3cy^2 - y^3 - 3c^2y$ par $c - y$.

OPERATION.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
c^3 & -3c^2y & +3cy^2 & -y^3 & c - y \\
\cline{5-5}
-c^3 & +c^2y & & & c^2 - 2cy + y^2 \\
\hline
* & -2c^2y & +3cy^2 & & \\
 & +2c^2y & -2cy^2 & & \\
\hline
 & * & +cy^2 & -y^3 & \\
 & & -cy^2 & +y^3 & \\
\hline
 & & * & * & \\
\hline
\end{array}
$$

Arrangez les termes du dividende ſuivant les degrés de la lettre c (on pourroit auſſi prendre la lettre y) c'eſt-à-dire, mettez à la premiere place le terme où la lettre c eſt élevée au plus haut degré ; c'eſt le terme c^3 ; écrivez enſuite le terme où la lettre c eſt élevée à un degré immédiatement plus bas : on voit que c'eſt le terme $- 3c^2y$: continuez cet arrangement juſqu'à la fin. Le dividende ainſi ordonné ſera $c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3$: on ordonnera auſſi les termes du diviſeur par rapport au degré de cette lettre en cas qu'elle en ait pluſieurs ; comme elle n'en a pas dans cet éxemple, le diviſeur eſt tout ordonné.

Après cette préparation vous diviſerez le premier terme c^3 du dividende par le premier terme c du diviſeur, & vous écrirez c^2 au quotient ; multipliant enſuite tout le diviſeur par c^2 vous en ſouſtrairez le produit $c^3 - c^2y$ du dividende, ce qui ſe fait en écrivant ſous le dividende les termes de ce produit avec des ſignes contraires ; on tire une ligne & l'on fait la réduction des grandeurs ſemblables. A côté du reſte $- 2c^2y$ on deſcend le troiſiéme terme $+ 3cy^2$ qui n'a point été réduit ; & l'on continue à diviſer le premier terme $- 2c^2y$ de ce ſecond membre par le premier terme c du diviſeur ; ce qui donne $- 2cy$ que l'on écrit au quotient : on multiplie tout le diviſeur par ce nouveau terme, & l'on en ſouſtrait le produit du ſecond membre à diviſer, comme l'on a fait dans la premiere opération. Il reſte $+ cy^2$ à côté duquel on place le dernier terme $- y^3$ du dividende : on diviſe toujours le premier terme $+ cy^2$ de ce troiſiéme membre par le premier terme c du diviſeur ; il vient au quotient $+ y^2$ par lequel on multiplie tout le diviſeur dont on retranche le produit à l'ordinaire de la quantité qui reſtoit à diviſer ; & comme

il ne reste rien, on voit que la division se fait exactement. Ainsi la quantité $c^2 - 2cy + y^2$ est le véritable quotient. La preuve en est qu'en multipliant le quotient $c^2 - 2cy + y^2$ par le diviseur $c - y$ on retrouve le dividende $c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3$.

On peut remarquer deux choses, 1°. que le procédé de la division Algébrique est tout à fait semblable à celui de la division Arithmétique. 2°. Que l'on ne divise jamais qu'un monôme par un monôme à chaque opération ; ainsi, au fonds, la division des polinômes n'est pas plus difficile que celle des monômes ; ce qui paroît y ajouter quelque différence c'est la multiplication de chaque terme du quotient par tout le diviseur qui donne un produit qu'il faut retrancher du dividende à chaque opération, afin que l'on sçache ce qui reste à diviser : la division Arithmétique tient précisément la même conduite ; ainsi cette opération ne prescrit rien de nouveau.

Quant à l'arrangement des termes par rapport aux degrés d'une certaine lettre, que nous appellerons dans la suite, *lettre d'origine* ; voici à quoi l'on doit faire attention. Lorsqu'un dividende est divisible par une quantité, cette quantité est nécessairement une des racines qui ont concouru à produire le dividende par voye de multiplication ; mais la production du dividende par voye de multiplication n'a pû se faire sans donner différens degrés à quelques lettres communes au multiplicande & au multiplicateur, lorsque l'un & l'autre est composé de différens termes : ainsi comme ces lettres ont été élevées à différens degrés par la multiplication ; on doit les faire descendre par la division dans le même ordre où elles peuvent être montées ; ce qui rend la division plus commode. Si l'on négligeoit

cet arrangement, on pourroit souvent se persuader qu'une division est *infaisable*, quoique les termes de cette division, ordonnés comme il faut, puissent donner un quotient éxact.

Pour diviser le polinôme $9ab^2 + 6a^3 - 15a^2b$ par $-3ab + 2a^2$. On arrangera les termes, comme on le voit dans l'opération, selon les degrés de la lettre d'origine a qui paroît dominer.

OPERATION.

$$\begin{array}{rrr|l} & & & 2a^2 - 3ab \\ \hline 6a^3 & -15a^2b & +9ab^2 & 3a - 3b \\ -6a^3 & +9a^2b & & \\ \hline * & -6a^2b & +9ab^2 & \\ & +6a^2b & -9ab^2 & \\ \hline & * & * & \\ \hline \end{array}$$

En divisant le premier terme $6a^3$ du dividende par le premier terme $2a^2$ du diviseur, on écrit $3a$ au quotient par lequel on multiplie tout le diviseur; le produit qui en résulte est retranché du dividende, & l'on continue à diviser le reste, comme ci-dessus; le quotient total doit être $3a - 3b$; ce que l'on vérifiera en multipliant ce quotient par le diviseur $2a^2 - 3ab$ dont le produit doit redonner le dividende.

S'il s'agit de diviser $8cx^2 + 15bds - 10bdx - 12csx - 3fg$ par $4cx - 5bd$.

On ordonnera les termes du dividende & du diviseur suivant les degrés de la lettre d'origine x; comme il y a deux termes au dividende où cette lettre est élevée au même degré on pourra écrire

ces deux termes l'un ſous l'autre, de même que les deux termes où la lettre d'origine ne ſe trouve pas.

OPERATION.

$$
\begin{array}{rrr|l}
8cx^2 - 10bdx + 15bds & & & 4cx - 5bd \\
-12csx - 3fg & & & \overline{2x - 3s - \frac{3fg}{4cx - 5bd}} \\
-8cx^2 + 10bdx & & & \\
\hline
* \; -12csx + 15bds & & & \\
-3fg & & & \\
+12csx - 15bds & & & \\
\hline
* \; -3fg & & & \\
\hline
\end{array}
$$

En diviſant donc le premier terme $8cx^2$ du dividende par le premier terme $4cx$ du diviſeur, le quotient eſt $2x$ par lequel on multiplie tout le diviſeur, ce qui donne $8cx^2 - 10bdx$ que l'on écrit ſous le dividende en changeant les ſignes de ce produit, comme on le voit éxécuté dans l'opération : la réduction étant faite on opére ſur le reſte $\begin{matrix} -12csx + 15bds \\ -3fg \end{matrix}$ en diviſant toujours le premier terme $-12csx$ de ce reſte par le premier terme $4cx$ du diviſeur, dont le quotient eſt $-3s$ par lequel on multiplie tout le diviſeur pour en retrancher le produit de ce qui eſt reſté après la premiere diviſion, & l'on a un ſecond reſte $-3fg$, lequel, n'ayant point de racines communes avec le diviſeur, fait voir que la diviſion ne ſçauroit ſe faire éxactement; ainſi on le diſpoſera à la ſuite du quotient au-deſſus d'une petite ligne ſous laquelle on écrira le diviſeur.

Des

Des Fractions Algébriques.

85. Comme l'on doit ſuivre dans le calcul de ces fractions les mêmes régles que nous avons preſcrites par rapport aux fractions Arithmétiques dont nous avons démontré les opérations avec beaucoup d'éxactitude; on ſe diſpenſera ici de répéter toutes les raiſons ſur leſquelles le calcul des fractions eſt fondé; il ſuffit d'en voir la façon Algébrique.

De l'Addition des Fractions Algébriques.

1°. Si ces fractions ont la même dénomination, on fera une ſomme de tous les numérateurs, & l'on poſera ſous cette ſomme le dénominateur commun. Ainſi $\frac{ab}{c} - \frac{ds}{c} + \frac{fm}{c} = \frac{ab - ds + fm}{c}$. De même $\frac{ps}{bb} - \frac{2gm}{bb} - \frac{4r}{bb} = \frac{ps - 2gm - 4r}{bb}$.

2°. Quand les fractions Algébriques n'ont pas une même dénomination, on la leur donne ſuivant les régles établies au chapitre du calcul des fractions numériques (n°. 38.) ainſi $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$.

De même $\frac{f}{g} - \frac{p}{s} - \frac{m}{x} + \frac{r}{t} = \frac{fstx}{gstx} - \frac{gptx}{gstx} - \frac{gmst}{gstx} + \frac{gsrx}{gstx} = \frac{fstx - gptx - gmst + grsx}{gstx}$. On voit donc que l'addition des fractions Algébriques, qui n'ont pas un même dénominateur, ſe fait en les réduiſant d'abord à la même dénomination, après quoi on fait une ſomme de leurs numérateurs ſous laquelle on poſe le dénominateur commun.

De la Soustraction des Fractions Algébriques.

66. Pour ôter $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{b}$ écrivez $\frac{c}{b} - \frac{a}{b} = \frac{c-a}{b}$, c'est-à-dire que pour trouver la différence entre deux fractions de même dénomination, on détermine la différence des numérateurs sous laquelle on écrit le dénominateur commun.

Les fractions qui n'ont pas une même dénomination, & dont on cherche la différence, doivent être réduites d'abord à un même dénominateur : cette préparation étant faite, on en détermine la différence en retranchant, comme ci-dessus, le numérateur du numérateur, & l'on écrit sous le reste le dénominateur commun : ainsi la différence de $\frac{b-c}{d}$ à la fraction $\frac{r}{s}$ se trouve en écrivant $\frac{b-c}{d} - \frac{r}{s} = \frac{bs-cs}{ds} - \frac{dr}{ds} = \frac{bs-cs-dr}{ds}$.

De la Multiplication des Fractions Algébriques.

67. On multipliera les numérateurs par les numérateurs & les dénominateurs par les dénominateurs; la fraction qui résultera de ces produits sera le produit cherché. Ainsi $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. De même $\frac{a-b}{m} \times \frac{a-b}{p} = \frac{aa-2ab+bb}{mp}$. Pareillement $\frac{2s-r}{f} \times \frac{d}{c-a} = \frac{2ds-dr}{cf-af}$.

De la Division des Fractions Algébriques.

68. La division des fractions Algébriques se fait

comme celle des fractions numériques. C'est-à-dire que l'on multiplie le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur ; le produit qui en vient doit faire le numérateur du quotient cherché & son dénominateur sera le produit du dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur. Par conséquent la fraction $\frac{b}{s}$ divisée par la fraction $\frac{c}{d}=$ $=\frac{b}{s}\times\frac{c}{d}=\frac{b\times d}{c\times s}=\frac{bd}{cs}$, en multipliant en sautoir.

Si l'on divise $\frac{2b-d}{-f}$ par $\frac{c-m}{p}$ il faudra écrire $\frac{2b-d}{-f}\times\frac{c-m}{p}=\frac{2b-d\times p}{-f\times c-m}=\frac{2bp-dp}{-cf+mf}$.

En un mot la seule différence qu'il y a entre les opérations des fractions Algébriques & celles que l'on fait sur les fractions numériques, consiste dans la maniére dont les signes + & — agissent les uns sur les autres : dans tout le reste le procédé est précisément le même. Ainsi qui connoît une de ces deux façons connoît aussi l'autre.

69. On ne voit pas encore à quoi aboutit ce calcul ; toutes ces combinaisons de lettres n'ont produit que des résultats indéterminés, d'où il ne paroît pas que l'on puisse retirer la moindre utilité. Cependant il est plus que vraisemblable que les Régles d'Arithmétique, un peu compliquées, ont eté découvertes par ce moyen ; on verra en Géométrie combien il est avantageux de pouvoir déterminer les racines qui ont concouru à former un produit, & nous allons éprouver ici l'excellence du calcul Algébrique pour la détermination de ces racines.

La méthode la plus palpable & la plus lumineuse de retrouver les quantités, qui composent un produit par voye de multiplication, est de prendre ces quantités avant leur composition, & de bien exa-

miner ce qui leur arrive quand on vient à les composer suivant certaines conditions données : car en faisant précisément le contraire de ce que l'on a fait dans la composition, les quantités doivent reparoître dans leur premier état ; l'art de retrouver ces produisans ou ces racines s'appelle *Analise* ou *décomposition*.

Un nombre, que l'on décompose ou dont on fait l'analise, ressemble parfaitement à une machine que l'on démonte pour en reconnoître les différentes piéces : celui qui sçait monter la machine peut la démonter avec une extrême facilité : comme il en connoît les différentes piéces, leur engrainure & leurs limites, il voit aussi à chaque pas la direction qu'il doit donner à ses mouvemens & le degré de force qu'il y faut employer : sans cette connoissance préliminaire il se trouve livré à un tâtonnement perpétuel & toujours exposé à une confusion qui ne permet plus de rien reconnoître à la machine.

Dans la décomposition des grandeurs numériques il y a un très-grand inconvénient : on n'y voit point les piéces ou les quantités qui les composent ; elles sont enveloppées dans le total ; quand je multiplie 9 par 4 j'ai 36 où 9 & 4 ne paroissent plus ; de-sorte que si l'on me demandoit les racines de 36, je ne pourrois pas déterminer précisément comment ce nombre 36 a été formé ; car il est non-seulement le produit de 4 par 9, mais il peut être celui de 18 par 2, de 12 par 3, de 6 par 6 ou même de 36 par 1.

Mais les grandeurs Algébriques sont toujours présentes dans un produit ; lorsqu'elles se multiplient, elles ne disparoissent pas comme les grandeurs numériques : elles laissent voir l'artifice de leur composition, & par conséquent elles en montrent l'analise qui doit agir en sens contraire.

Multiplions $2a$ par c; le produit $2ac$ nous montre qu'il n'y a point d'autres grandeurs, qui ayent concouru à le former, que celles que l'on y apperçoit : le calcul Algébrique est donc fort propre à trouver les Régles de la composition & de l'analise; c'est pourquoi nous allons d'abord nous servir de ce calcul, & nous appliquerons aux quantités numériques les Régles qu'il nous fera découvrir.

De la génération des puissances Algébriques & de leur Analise ou de la Résolution de ces puissances en leurs racines.

70. *La premiere puissance* ou le premier degré d'une grandeur, par éxemple, de la quantité a est cette quantité elle-même. Le produit de cette quantité par elle-même ou a^2 est *la seconde puissance* de a; que l'on appelle quelquefois *second degré* ou encore son *quarré*. La *troisiéme puissance* de a est le produit de sa premiere puissance a par sa seconde puissance a^2; ce qui produit a^3 qui est aussi appellé *le troisiéme degré* ou le *cube* de la quantité a, &c. Il est donc facile d'élever une grandeur à une puissance quelconque; puisqu'il ne s'agit que de la multiplier par elle-même autant de fois qu'il en est besoin.

La quantité, dont la multiplication continuelle a produit une puissance ou un degré, est appellé la *racine de ce degré*; ainsi a est la racine seconde ou la racine quarrée de a^2.

La quantité a est aussi la racine troisiéme ou la racine cubique de a^3.

En général la racine quarrée d'une quantité est une grandeur, laquelle, étant multipliée par elle-même, redonne la grandeur dont elle est racine; ainsi 3 est la racine quarrée de 9, parce que $3 \times 3 = 9$.

De même la racine troisiéme ou cubique d'un nombre est une quantité qui redonne le nombre proposé lorsqu'elle est multipliée par son quarré. Le nombre 4 est la racine cubique de 64 ; car si l'on multiplie le quarré de 4 = 16 par 4, on retrouve le nombre proposé 64.

71. Quand une puissance Algébrique est un monôme la racine en est toujours fort aisée à trouver, de quelque nombre de lettres que ce monôme soit composé. On voit tout d'un coup que la racine quarrée de $aacc$ ou de a^2c^2 est ac ; puisque $ac \times ac = a^2c^2$. Il n'est pas plus difficile de s'appercevoir que la racine cubique de $b^3c^3 = bc$; car $bc \times bc \times bc = b^3c^3$. Ainsi, quand on s'apperçoit que les exposans d'un monôme sont du même degré que la racine que l'on propose d'extraire, on supprime les exposans, & l'on écrit les lettres pour la racine.

72. Mais si quelques lettres du monôme, dont il s'agit d'extraire la racine, avoient un exposant d'un degré plus petit que celui de la racine ; on ne pourroit jamais trouver cette racine au juste. La racine quarrée de a^2c n'est pas déterminable à la rigueur ; c'est-à-dire, qu'il n'y a point de quantité Algébrique, laquelle multipliée par elle-même puisse donner éxactement la quantité a^2c ; & ceci ne doit pas surprendre ; la racine quarrée du nombre 7 n'est pas plus déterminable que la racine quarrée de a^2c : cette racine ne peut être ni 2 ni 3, puisque $2 \times 2 = 4$ plus petit que 7 ; & $3 \times 3 = 9$ plus grand que 7 : la racine quarrée de 7 est donc entre 2 & 3, & par conséquent, si on pouvoit la déterminer, elle seroit 2 & quelque partie de l'unité ; or il n'est pas possible que la racine quarrée de 7 soit 2 accompagné de quelque fraction, parce qu'en multipliant cette racine par elle-même, on devroit retrouver le nom-

bre entier 7 ; mais on ne peut jamais trouver un entier quand on multiplie une fraction par elle-même ; car ſuppoſons cette fraction réduite à ſes plus ſimples termes, alors ſon numérateur ou, ce qui eſt la même choſe, le dividende n'aura aucune racine commune avec le dénominateur ou le diviſeur : ainſi en multipliant cette fraction par elle-même, comme on n'introduit point de nouvelles racines par cette multiplication, ſon produit eſt encore une fraction dont le numérateur & le dénominateur ou, ce qui revient au même, dont le dividende & le diviſeur n'ont aucunes racines communes : mais, pour avoir un entier au quotient, c'eſt-à-dire, pour avoir un quotient qui ne ſoit accompagné d'aucune fraction, il eſt néceſſaire que le dividende puiſſe être diviſé ſans aucun reſte ; & afin que cette diviſion ait lieu, il faut que le dividende & le diviſeur ayent des racines communes ; ce qui n'étant pas, c'eſt une néceſſité que le quotient de cette diviſion ſoit accompagné d'une fraction, & qu'ainſi un nombre entier, qui n'a pas un entier pour ſa racine quarrée, ne puiſſe pas auſſi avoir une fraction pour cette même racine.

Il n'eſt donc pas poſſible que le quarré d'un nombre accompagné d'une fraction ne donne qu'un entier ; ainſi la racine quarrée de 7 n'étant ni un nombre entier, ni un entier accompagné d'une fraction, il s'enſuit qu'il n'eſt pas poſſible de déterminer à la rigueur la racine quarrée de 7 ou de tout autre nombre entier qui n'a pas pour racine un autre nombre entier.

73. Ces racines indéterminables s'appellent des *incommenſurables*, c'eſt-à-dire, des quantités qui n'ont aucune commune meſure avec l'unité ; il faut bien que cela ſoit ; car ſi ces racines indéterminables avoient quelque commune meſure avec l'unité ou

avec quelques parties de cette unité, elles seroient par cela même déterminées ; ce que nous avons démontré impossible.

74. On dit que des grandeurs ont une commune mesure quand elles sont réductibles en parties de même nom & de même valeur. 8 & 17 ont 1 pour commune mesure; car 1 répété 8 fois mesurera 8 éxactement, & en le répétant 17 fois il sera au juste la mesure de 17. On peut aussi trouver une commune mesure aux nombres 3 & $\frac{2}{5}$. Réduisez-les à la même dénomination, vous aurez $\frac{15}{5}$ & $\frac{2}{5}$ dont la mesure commune est $\frac{1}{5}$ pris 2 fois d'une part & 15 fois de l'autre. Un nombre, de quelque nature qu'il soit, a donc toujours une commune mesure avec un autre nombre entier ou fractionné.

75. Quoiqu'il y ait des racines indéterminables, on a néanmoins trouvé un supplément à cette impossibilité ; c'est d'approcher de la valeur de ces racines aussi près que le besoin l'éxige, & même plus près, ainsi que nous le démontrerons plus bas.

76. On voit donc facilement si un monôme Algébrique a une racine quelconque ou s'il n'en a pas; quant aux polinômes la chose n'est pas si aisée, ce n'est qu'à l'aide de la composition que nous pouvons en faire l'analise. Multiplions donc $a + b$ par $a + b$, le produit $aa + 2ab + bb$ sera le quarré de $a + b$, où je remarque que le quarré d'un nombre Algébrique, composé de deux quantités, contient, 1°. le quarré aa de la premiere a. 2°. Le double $2a$ de la premiere par la seconde $b = 2ab$. 3°. Enfin le quarré bb de la seconde b. Que l'on se rende attentif à cette composition ; c'est-là-dessus que sont fondées toutes les régles de l'analise.

Elevons maintenant à son quarré la quantité

$a + b + c$ qui a trois termes, c'est-à-dire, multiplions $a + b + c$ par $a + b + c$. Le produit sera $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$ ou $aa + 2ab + bb + \overline{2a + 2b} \times c + cc$; en considérant ce quarré je vois qu'il renferme, 1°. le quarré $aa + 2ab + bb$ des deux premiers termes $a + b$. 2°. Le produit du double des deux premiers termes par le troisiéme $= \overline{2a + 2b} \times c$. Enfin le quarré cc du troisiéme terme c. Et en continuant de former le quarré d'une grandeur composée de quatre termes, on y trouveroit le quarré des trois premiers termes, ensuite le produit du double des trois premiers termes par le quatriéme & le quarré du quatriéme.

77. Puisque nous sçavons comment se forme un quarré, essayons de retrouver sa racine; ce doit être en prenant une route opposée à celle de sa composition. Supposons qu'il s'agisse de retrouver la racine quarrée de la quantité Algébrique. $9ss + 4ccxx - 12csx$.

OPERATION.

$$\begin{array}{r|l} 4c^2x^2 - 12csx + 9s^2 & 2cx - 3s \text{ racine} \\ -4c^2x^2 \qquad\qquad\qquad & \overline{4cx - 3s \text{ divis.}} \\ \hline * \quad - 12csx + 9s^2 & \\ + 12csx - 9s^2 & \\ \hline * \qquad * & \end{array}$$

Ordonnons les termes suivant les degrés de la lettre d'origine x, comme l'opération l'indique, &

puisque (n°. 76.) le premier terme d'un quarré est un quarré, prenons la racine quarrée du premier terme $4c^2x^2$; c'est $2cx$ que nous écrirons à l'endroit ou doit être placée la racine : quarrons ce premier terme de la racine nous aurons $4c^2x^2$ que l'on retranchera du quarré dont on extrait la racine en le plaçant sous le premier terme avec un signe contraire. Après la soustraction il restera $-12csx+9s^2$.

Il s'agit présentement de trouver le second terme de cette racine : mais nous sçavons par la composition du quarré (n°. 76.) que ce second terme est multiplié par le double du premier terme de la racine : ainsi doublons le premier terme $2cx$ nous aurons $4cx$, & divisons, par ce terme ainsi doublé, le premier terme $-12csx$ de ce qui nous reste, nous devons trouver le second terme de la racine; car la division agit en sens contraire de la multiplication; en effet $-12csx$ divisé par $4cx$ donné $-3s$ que l'on écrira à la racine & à côté du diviseur $4cx$, & multipliant $4cx-3s$ par $-3s$, on en posera le produit $-12csx+9ss$ avec des signes contraires sous les deux termes $-12csx+9ss$; &, comme il ne reste rien, après la réduction de ces quantités, on voit que la racine quarrée de la quantité proposée est $2cx-3s$; ce que l'on prouvera en multipliant la racine $2cx-3s$ par elle-même; car l'on retrouvera le quarré proposé.

On a mis à côté du diviseur $4cx$ le second terme $-3s$ de la racine, afin d'avoir aussi le quarré de ce second terme à retrancher du quarré dont on extrait la racine; parce que, suivant la composition d'un quarré qui a deux termes à sa racine, (n°. 76.) outre le quarré du premier terme & le produit du double du premier terme par le second; il y a encore le quarré de ce second terme.

Quand la racine aura plus de deux termes on en trouvera toujours le suivant en doublant les deux premiers termes de la racine, & divisant par ce double ce qui reste du quarré après les deux premiéres opérations.

EXEMPLE.

Vous cherchez la racine quarrée de la quantité Algébrique $aa + 2ad + dd - 2ac - 2dc + cc$.

OPERATION.

$aa + 2ad + dd - 2ac$	$a + d - c$
$-aa \qquad\qquad\qquad - 2dc$	$2a + d$
$\qquad\qquad\qquad\qquad + cc$	$2a + 2d - c$
$* + 2ad + dd$	
$\;\; - 2ad - dd$	
$\quad * \qquad * \; - 2ac$	
$- 2dc$	
$+ cc$	
$+ 2ac$	
$+ 2dc$	
$- cc$	
$*$	

Après avoir trouvé les deux premiers termes $a + d$ de la racine, comme ci-dessus, je double ces deux premiers termes, il me vient $2a + 2d$ par lequel je divise le reste $- 2ac - 2dc + cc$ du quarré proposé, & comme je m'apperçois que

$- 2ac - 2dc = 2a + 2d \times - c$; il est clair qu'en divisant ces deux termes par $2a +$ $+ 2d$, il vient $- c$ à la racine ; j'écris aussi $- c$ à côté du diviseur $2a + 2d$; & je multiplie $2a + 2d - c$ par le dernier terme $- c$ de la racine ; j'en retranche le produit du reste $- 2ac - 2dc + cc$; & il ne reste rien ; ainsi $a + d - c$ est la racine quarrée de la quantité proposée, ce qui se prouve comme ci-dessus.

Pour avoir le troisiéme terme de la racine, nous avons doublé les deux premiers termes dont le produit nous a servi à diviser ce qui restoit après avoir trouvé les deux premiers termes ; parce que dans la composition du quarré, qui a trois termes à sa racine, nous avons vu (n°. 76.) que ce quarré contenoit non-seulement le quarré des deux premiers termes, mais encore le produit du double des deux premiers termes par le troisiéme, & le quarré de ce troisiéme. Ainsi après avoir déterminé les deux premiers termes de la racine; on voit qu'il faut diviser ce qui suit par le double des deux premiers termes de la racine, afin de dégager ce troisiéme terme enveloppé dans la multiplication du double des deux premiers termes.

La décomposition ou l'analise des grandeurs s'appellent vulgairement *l'extraction des racines.*

L'opération précédente est une extraction de racine quarrée Algébrique; elle va nous servir de modéle pour la racine quarrée des quantités numériques.

Extraction de la racine quarrée des nombres.

78. Commençons par former les quarrés de tous les chiffres.

Table des quarrés de tous les chiffres depuis 1 jusqu'à 9.

Racines	-	-	-	quarrés
1	-	-	-	1
2	-	-	-	4
3	-	-	-	9
4	-	-	-	16
5	-	-	-	25
6	-	-	-	36
7	-	-	-	49
8	-	-	-	64
9	-	-	-	81

Cette Table fait voir que le quarré de $1 = 1$; car 1×1 produit 1. Le quarré de $2 = 4$, puisque $2 \times 2 = 4$; ainsi 2 est la racine quarrée de 4. 5 est aussi la racine quarrée de 25; car $5 \times 5 = 25$, &c.

79. Considérez qu'une quantité qui n'a que 2 chiffres ne peut pas avoir plus d'un chiffre à sa racine; ainsi 99 n'a pas deux chiffres à sa racine si petits qu'on les puisse supposer; car la plus petite quantité qui ait deux chiffres est 10; or 10 n'est pas la racine quarrée de 99; car $10 \times 10 = 100$ plus grand que 99. : d'où l'on voit qu'un nombre

composé de trois chiffres aura nécessairement deux chiffres à sa racine; mais il n'en aura jamais trois. La plus petite quantité a trois chiffres est 100; or 100 x 100 = 10000 qui est un nombre composé de cinq chiffres; ainsi tous les nombres, depuis 100 jusqu'à 10000 exclusivement, ne pourront avoir que deux chiffres à leur racine, par exemple, la racine quarrée du nombre *9999* n'aura pas trois chiffres; puisque le quarré des trois plus petits chiffres que l'on puisse supposer donnera un produit plus grand que *9999*; il faut donc qu'une quantité soit exprimée au moins par cinq chiffres pour avoir trois chiffres à sa racine, & elle n'en aura jamais quatre; puisque le nombre 1000, composé des quatre chiffres les plus petits, produit à son quarré 1000000, un nombre composé de sept chiffres; ainsi tous les nombres compris entre 10000 & 1000000 exclusivement ne pourront avoir que trois chiffres à leur racine: si l'on continue cette maniére d'envisager la formation des quarrés, on reconnoîtra que la racine d'un nombre compris entre 1000000 & 100000000 exclusivement ne pourra contenir plus de quatre chiffres, &c.

En résumant donc ce que nous venons de démontrer, toute puissance au-dessus d'un chiffre, mais au-dessous de trois, ne pourra avoir qu'un chiffre à sa racine; quand elle sera au-dessus de trois chiffres, mais au-dessous de cinq, sa racine n'en pourra contenir que deux; au-dessus de cinq, mais au-dessous de sept, elle n'en pourra contenir que trois, & ainsi de suite en prenant pour limites les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. qui se surpassent toujours de deux.

80. Il est clair que, si l'on me propose d'extraire la racine quarrée du nombre 2025, je puis déterminer d'abord le nombre de chiffres dont sa ra-

cine sera composée ; car par la formation des puissances un nombre composé de cinq chiffres aura nécessairement trois chiffres à sa racine.

81. Pour déterminer maintenant ces trois chiffres, formons un quarré numérique quelconque sur le modéle de la formation Algébrique ; élevons au quarré le nombre 321 : par la méthode Arithmétique on en multiplieroit successivement les trois nombres par chaque nombre dont il est composé, & par conséquent on y distingue trois parties qui sont 300 + 20 + 1 ; ainsi pour élever ce nombre à son quarré par la méthode Algébrique, prenez un quarré Algébrique dont la racine ait trois termes comme $a + b + c$, dont le quarré est

$$aa + 2ab + bb + \overline{2a + 2b} \times c + cc,$$

que j'appellerai dans la suite *formule Algébrique* ; & supposez que 300 soit représenté par a ; que 20 le soit par b & 1 par c.

Formation Algébrique du quarré du nombre 321 ou 300 + 20 + 1.

90000	aa
12000	$+ 2ab$
400	$+ bb$
640	$2a + 2b \times c$
1	$+ cc$
1 0|3 0|4 1	

Suivant la formule je dois prendre le quarré du premier terme 300 = 90000. Ensuite le produit du double du premier terme par le second, c'est-à-dire, 2 fois 300 × par 20 = 12000. Après cela le quarré du second terme ou 20 × 20 = 400. Et

puis le produit du double de la ſomme des deux premiers termes par le troiſiéme terme, c'eſt-à-dire, 2 fois 300 + 20 × 1 = 640. Enfin le quarré du troiſiéme terme = 1, & faiſant l'addition de tous ces produits, je trouve par cette méthode que le quarré du nombre 321 eſt 103041, ainſi qu'on le trouveroit en multipliant à l'ordinaire 321 par 321; mais voici les avantages que l'on retire de cette formation Algébrique, c'eſt que l'on peut déterminer éxactement où l'on trouvera chaque terme de la racine.

Car, 1°. le quarré 103041 compoſé de ſix chiffres doit avoir trois termes à ſa racine (n°. 79.) je puis donc, pour ma commodité, le couper en trois tranches, dont chacune renferme deux chiffres en commençant de la droite vers la gauche, afin d'avoir un ſigne perpétuel qui m'indique combien il y aura de chiffres à la racine.

2°. En faiſant réfléxion à la formation du quarré numérique 10 | 30 | 41, dont la racine eſt 321, j'obſerve que le quarré du premier terme 3 de ma racine doit être précédé de quatre zeros, puiſqu'il eſt effectivement 90000, & qu'ainſi je dois trouver le premier terme de ma racine dans une place qui ſoit précédée de quatre chiffres; je le trouverai donc dans les deux chiffres 10 de ma premiere tranche qui eſt précédée des quatre chiffres 3041.

Pour ſçavoir où je trouverai le ſecond terme de ma racine, j'obſerve encore que ce ſecond terme 2 étant multiplié par le double 6 du premier terme 3; le produit 12, qui en réſulte a devant lui trois chiffres; car ce produit étant 20 × 2 fois 300 = 12000, on voit que 12 eſt précédé de trois chiffres, & par conſéquent on doit trouver le ſecond terme de la racine ſans aller plus loin que le premier chiffre 3 de la ſeconde tranche, qui eſt précédé des trois chiffres 041.

041. Enfin le troisiéme terme 1 étant multiplié par le double de la somme des deux premiers termes 300 & 20, c'est-à-dire, par le double de 320 = = 640, le produit est 640 qui est précédé d'un zero, & par conséquent on trouvera le dernier terme de la racine sans aller plus loin que le premier chiffre 4 de la troisiéme tranche qui est précédé d'un chiffre.

EXEMPLE.

Soit donc proposé d'extraire la racine quarrée du nombre 21025.

OPERATION.

	1 4 5 . .	Racine
2|1 0|2 5	2 4	Diviseurs
1 1 0	2 8 5	
9 6		
1 4 2 5		
1 4 2 5		
. . .		

Je le partage en tranches qui renferment deux chiffres en commençant de la droite vers la gauche; & par le nombre des tranches je juge d'abord que la racine de ce nombre sera exprimée par trois chiffres, quoique la premiére tranche n'en contienne qu'un, parce qu'il peut très-bien arriver, comme dans cet éxemple, qu'un quarré soit exprimé par un seul chiffre; ainsi sa racine quarrée doit se trouver dans ce chiffre seul.

Ensuite étant prévenu par la formation des puis-

fances où plutôt par la formation des quarrés numériques que la premiére tranche renferme le quarré du premier terme de la racine que je cherche, j'extrais donc la racine quarrée du premier nombre 2, & j'écris 1 à la racine ; j'ôte le quarré de 1 du nombre 2 de la premiére tranche ; il me reste 1 à côté duquel je descends toute la seconde tranche 10, & je mets un point sous le premier chiffre 1 de cette tranche pour indiquer que c'est-là où je dois borner ma division, & comme le second terme que je cherche est multiplié par le double du premier terme 1 de ma racine ; je double 1 & j'écris 2 sous la ligne du côté de la place des racines. Je divise 11 par 2. Le quotient 5 que je trouve d'abord étant trop fort, je ne mets que 4 à la racine à côté de 1 ; je le place aussi à côté du diviseur 2, & je multiplie 24 par 4 ; j'en retranche le produit 96 de 110, & il me reste 14. A côté de ce reste je descends la troisiéme tranche 25, ayant soin de mettre un point sous le premier nombre 2 de cette tranche, ce qui m'indique que je dois trouver le troisiéme terme de la racine dans 142 ; or nous sçavons que ce troisiéme terme est multiplié par le double des deux premiers termes de la racine ; divisons donc 142 par le double de 14 ou par 28 ; on ne trouve que 5. J'écris ce nombre à la racine ; je le place aussi à la suite du diviseur 28 ; je multiplie par 5 ce diviseur ainsi augmenté, & j'en retranche le produit 1425 du reste 1425 ; comme il ne me reste rien, je vois que la racine éxacte de 21025 est 145. On le prouve en multipliant 145 par 145 ; car on retrouve le quarré 21025.

Remarquez qu'après avoir trouvé le premier chiffre 1 de la racine 145, je quarre ce chiffre, & je l'ôte de la premiére tranche, à cause que cette tranche doit contenir le quarré du premier terme

de ma racine : &, pour en déterminer le ſecond, à côté du reſte de ma premiére tranche j'abbaiſſe toute la ſeconde tranche 10, & je mets un point ſous le premier chiffre 1 de cette tranche, parce que je dois trouver le ſecond terme de ma racine ſans aller plus loin que le premier chiffre de la ſeconde tranche (n°. 81.); mais comme ce ſecond terme que je cherche eſt néceſſairement multiplié par le double du premier terme que j'ai déja trouvé, il faut donc que je diviſe, par le double de ce premier terme, c'eſt-à-dire par 2, les chiffres 11 où ce ſecond terme eſt contenu : car la diviſion, étant oppoſée à la multiplication, elle fera diſparoître le nombre qui multiplie le terme que je cherche; j'écris donc ce terme 4 ainſi dégagé à la racine : je l'écris auſſi à côté du diviſeur 2 qui m'a fait trouver ce terme; & je multiplie ce diviſeur ainſi augmenté qui eſt alors 24 par ce même terme 4; ce qui me produit 96, c'eſt-à-dire le double du premier terme de la racine multiplié par le ſecond, plus le quarré du ſecond; j'ôte ce produit non-ſeulement des chiffres 11 qui ont ſervi de dividende, mais des trois chiffres 110, parce que la ſeconde tranche contient non-ſeulement le double du premier terme de la racine multiplié par le ſecond, mais encore le quarré du ſecond, &c.

Comme les autres termes de la racine ſe trouvent en ſuivant préciſément la même méthode, on peut appliquer aux opérations ſuivantes tout ce que nous venons de dire ſur la maniére de trouver le ſecond terme d'une racine quarrée. Et l'on verra que l'extraction des racines ſuit préciſément une voye oppoſée à la formation de leurs puiſſances. Il eſt donc d'une extrême importance d'examiner bien attentivement ce qui arrive à une grandeur élevée à un degré ou à une puiſſance quelconque; car ſi vous vous

lez la faire descendre du degré où elle est montée (ce qui s'appelle en extraire la racine) elle reviendra dans son premier état par la même route ; mais en sens contraire : elle s'est élevée par la multiplication ; elle s'abaissera donc par la division. Or c'est ce que nous avons éxécuté ; ainsi nous avons dû retrouver, & nous avons retrouvé en effet la racine dont la puissance s'étoit formée.

Autre Exemple d'une extraction de Racine quarrée.

On demande de trouver la racine quarrée de la quantité 103041.

OPERATION.

```
  . . .      | 3 2 1 . . . Racine
1 0|3 0|4 1  |-----------
    .   .    |  6 2
  9          | 6 4 1       Diviseurs
 -----
  1 3 0
    .
  1 2 4
 -------
  . . 6 4 1
        .
      6 4 1
     -------
      . . .
     -------
```

Après l'avoir partagée en tranches qui contiennent chacune deux chiffres (en commençant les sections de la droite vers la gauche, parce qu'il peut arriver que la tranche la plus à la gauche ne contienne qu'un chiffre, comme nous l'avons déja fait remarquer) j'extrais la racine quarrée de la première tranche 10, & je trouve 3 que j'écris à la

racine. Je quarre 3, j'ai 9 que j'ôte de ma première tranche 10 ; il me reste 1 à côté duquel je descends la seconde tranche 30 : je pose un point sous le premier chiffre 3 de cette seconde tranche. Ensuite je double le premier terme 3 de ma racine ; j'écris 6 sous la ligne, & divisant 13 par 6 il me vient 2 que j'écris à la racine & à côté de 6 ; je multiplie 62 par 2, c'est-à-dire par le terme que je viens de trouver, j'ai 124 que j'ôte de 130, il me reste 6, à côté duquel je descends la troisiéme tranche 41, en mettant un point sous le premier terme 4 de cette troisiéme tranche; je double ensuite les deux termes 32 de ma racine ; j'ai 64, par lesquels je divise 64 ; le quotient est 1 que j'écris à la racine & à côté de 64 : multipliant ensuite 641 par le terme 1 que je viens de trouver, j'ôte ce produit de 641, il ne reste rien. Ainsi le nombre 321 est la racine quarrée que je cherche.

Il y a des cas où l'on doit écrire un zero à la racine ; on va voir quand cela arrive.

EXEMPLE.

Quelle est la racine quarrée du nombre 25401600?

OPERATION.

```
               | 5 0 4 0
2 5|4 0|1 6|0 0|---------
2 5            |     1 0
---            |   1 0 0 4
. . 4 0 1 6        1 0 0 8
    4 0 1 6
-------------
. . . . . 0 0
-------------
```

Je le partage en tranches, comme ci-dessus, & je dis la racine quarrée de 25 est 5 que j'écris à la racine. Quarrant 5 j'ai 25 que j'ôte de la premiére tranche, 25 & il ne reste rien. Je descends toute la seconde tranche 40, en mettant un point sous le premier chiffre 4 de cette tranche, & après avoir doublé, 5 j'ai 10 pour diviseur; ainsi je dis en 4 combien de fois 10? il n'y est point du tout. J'écris donc 0 à la racine, & je descends la troisiéme tranche 16, sous le premier chiffre 1 de laquelle je mets un point; cela m'indique que le dividende est 401. Je double les deux termes 50 de la racine; j'ai 100 par lesquels je divise 401, le quotient est 4, je l'écris à la racine & à la suite de 100; je multiplie 1004 par ce nombre 4 que je viens de trouver; j'en ôte le produit 4016 de 4016; il ne reste rien. Voyant enfin que la quatriéme tranche ne contient que des zeros, j'écris encore 0 à la racine; par conséquent la racine totale est 5040.

On ne trouve pas toujours une racine quarrée éxacte: le nombre 5079, n'étant pas un quarré parfait, n'aura pas une racine quarrée parfaite: on n'extrait alors la racine quarrée que du plus grand quarré contenu dans ce nombre.

OPERATION.

50|79	71..	Racine
49	141	Diviseur
179		
141		
38		

Coupez par tranches le nombre 5079, & dites la racine quarrée de la premiére tranche 50 est 7 que j'écris à la racine. Je quarre 7 j'ai 49 que j'ôte de la premiére tranche 50, & il me reste 1 à côté duquel je descends toute la seconde tranche 79, en mettant un point sous son premier chiffre 7; après quoi je double le terme 7 de la racine que je viens de trouver; j'ai 14 par lequel je divise 17; il vient 1 que j'écris à la racine & à côté de 14. Je multiplie 141 par ce nombre 1 de la racine; j'en soustrais le produit 141 de 179, & il me reste 38 dans lesquels je ne dois plus chercher aucuns chiffres pour la racine, parce qu'un nombre composé de quatre chiffres ne sçauroit avoir trois nombres entiers à sa racine.

On prouve que l'on a bien opéré en multipliant la racine 71 par 71; le produit 5041 que l'on trouve joint au reste 38, étant égal au nombre proposé 5079, fait voir que l'on ne s'est pas trompé dans l'opération; mais pour vous convaincre que le nombre 71 est, en nombres entiers, la plus grande racine quarrée que l'on puisse extraire du nombre 5079; augmentez cette racine 71 seulement de 1, qui est le plus petit entier possible, vous aurez 72; mais le quarré de 72 = 5184 nombre plus grand que la quantité proposée 5079; ainsi 72 ne sçauroit être une racine quarrée extraite du nombre 5079; par conséquent 71 est, en nombres entiers, la plus grande racine qui y soit contenuë.

Cependant, quoique l'on ne puisse pas trouver à la rigueur la racine quarrée d'un nombre entier qui n'est pas quarré, (n°. 72.) on peut en approcher si près que la différence, de celle que l'on trouve, à la véritable est plus qu'insensible.

Approximation à l'infini de la Racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas quarré.

79. Conſidérez que quand on extrait la racine quarrée d'un nombre, comme 8, qui n'eſt pas un nombre quarré, il ne s'en faut jamais 1 que l'on n'ait la véritable ; car, en prenant 2 pour la racine quarrée de 8, on paroît fort éloigné de la grandeur que l'on cherche, puiſque 2×2 ne donne que 4 au lieu de 8, que l'on devroit retrouver, ſi la racine étoit éxacte ; cependant le nombre 2 n'eſt pas trop petit de la quantité 1 ; car ſi vous prenez 3 au lieu de 2, vous verrez que 3 eſt une racine trop grande ; car $3 \times 3 = 9$ plus grand que 8. Ainſi par la méthode que nous avons propoſée d'extraire une racine quarrée d'un nombre quelconque, lorſque cette racine n'eſt pas éxacte, elle n'eſt jamais éloignée de la quantité 1, de la véritable racine.

Mais il n'y a point de nombres que je ne puiſſe rompre en auſſi petites parties que je voudrai. 1 peut devenir 1 dixiéme, 1 centiéme, 1 millioniéme, 1 cent billioniéme, &c. à l'infini. Le nombre qui n'eſt pas quarré, & dont j'extrais la racine quarrée, peut donc être diviſé en parties telles qu'il ne s'en faudra pas 1 milliéme, ou 1 cent millioniéme, &c. que je n'aye la véritable racine quarrée de ce nombre ; or 1 cent millioniéme de pied, par exemple, eſt au-deſſous de l'inſenſible ; car 1 dix milliéme de pied n'eſt pas ſenſible, 1 cent milliéme l'eſt encore moins, 1 cent millioniéme eſt donc fort au-deſſous de l'inſenſible ; & par conſéquent, ſuppoſant que l'on puiſſe éxécuter ce que j'avance, on a une approximation qui va beaucoup au-delà de nos beſoins.

Vous allez voir que cette approx
ſimale eſt la choſe du monde la p
cevoir, & même à éxécuter. Po
ſerverez, 1°. que l'on a la racine q
tion en extrayant la racine quarrée
rateur & celle de ſon dénominateur, par ex
la racine quarrée de $\frac{4}{9}$ eſt $\frac{2}{3}$, car $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; ou vous voyez que la racine quarrée d'une fraction quarrée eſt une fraction, dont le numérateur eſt la racine quarrée du numérateur & le dénominateur eſt auſſi la racine quarrée du dénominateur de la fraction dont on extrait la racine.

2°. Qu'une fraction, comme $\frac{2}{3}$, dont le numérateur & le dénominateur ne ſont pas des nombres quarrés, peut devenir égale à une fraction dont le dénominateur ſoit un nombre quarré; multipliez le deſſus & le deſſous de la fraction $\frac{2}{3}$ par ſon dénominateur 3; la nouvelle fraction $\frac{6}{9}$ a pour dénominateur le nombre quarré 9, & cette fraction $\frac{6}{9}$ eſt égale à la fraction $\frac{2}{3}$ (n°. 39.): ainſi, quand on extrait la racine quarrée d'une fraction dont le numérateur & le dénominateur ne ſont pas des nombres quarrés, il n'y a jamais que le numérateur dont on ne puiſſe pas tirer éxactement la racine quarrée, en faiſant la transformation que nous venons de propoſer.

Suppoſons maintenant que l'on nous propoſe d'extraire la racine quarrée du nombre 13, qui n'eſt pas un nombre quarré, & que l'on mette pour condition de trouver une quantité qui ne ſoit pas ſeulement de 1 milliéme au-deſſous de la véritable racine.

Par la condition du problême ce ſont donc des milliémes que je dois trouver à ma racine; or pour trouver des milliémes à une racine, il faut que la puiſſance de cette racine ſoit compoſée de millioniémes, puiſque la racine de 1000000; c'eſt-à-dire,

d'un million, est 1000 ou mille. Il nous faut par conséquent réduire en millioniémes le nombre proposé 13, c'est-à-dire que chaque partie de ce nombre doit devenir un million de fois plus petite & contenir ainsi un million de parties ; or si chaque unité de 13 est divisée en un million de parties ou contient un million de parties, les 13 unités contiendront 13 millions de parties qui feront alors des millioniémes ; on aura donc 13 millions de millioniémes ou $\frac{13000000}{1000000}$ dont il faut extraire la racine quarrée. Celle du dénominateur est 1000 ; reste donc à trouver celle du numérateur : on procédera à l'ordinaire en coupant par tranches le nombre 13000000, & l'on trouvera que la plus grande racine quarrée du numérateur proposé est 3605.

OPERATION.

13|00|00|00	3605...	Racine.
9	66	
400	72	Diviseurs.
396	7205	
40000		
36025		
3975		

On mettra ce nombre au-dessus d'une petite ligne sous laquelle on posera la racine quarrée 1000 du dénominateur 1000000 ; ensorte que la quantité $\frac{3605}{1000}$ sera une expression de la racine quarrée du nombre 13 si approchée qu'il ne s'en faudra pas

$\frac{1}{1000}$ ou 1 milliéme que l'on n'ait ce qui étoit à trouver ; car si au lieu de $\frac{3605}{1000}$ vous prenez $\frac{3606}{1000}$, qui n'est que d'un milliéme plus fort, vous aurez une racine quarrée trop grande, puisqu'en multipliant $\frac{3606}{1000}$ par $\frac{3606}{1000}$ vous trouverez le produit $\frac{13003236}{1000000} = 13 + \frac{3236}{1000000}$ qui est plus grand que 13.

En général pour approcher de la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas quarré, on multipliera ce nombre par un quarré ; mais afin qu'il ne change pas de valeur on le divisera toute de suite par ce même nombre quarré ; ensorte que ce nombre se produira alors sous la forme d'une fraction de même valeur que le nombre entier ; par exemple, multipliez 5 par 100, vous aurez 500 ; divisez le produit 500 par 100, il vous reviendra $\frac{500}{100} = 5$.

Dans l'extraction des racines on préfére de multiplier par des nombres quarrés composés uniquement de l'unité suivie de plusieurs zeros, parce que la multiplication est faite sur le champ, en mettant seulement à la suite du nombre, que l'on multiplie, tous les zeros qui sont au multiplicateur ; un autre avantage c'est que la division par ces sortes de nombres, où il n'y a que l'unité suivie de plusieurs zeros, se fait avec une extrême rapidité. Vous avez vu qu'en multipliant 13 par 1000000 on a mis simplement six zeros à la suite du nombre 13.

De même pour diviser 3605 par 1000 ôtez de 3605 autant de chiffres qu'il y a de zeros au diviseur, c'est-à-dire trois, en commençant de la droite vers la gauche, vous aurez tout d'un coup 3 pour quotient avec la fraction $\frac{605}{1000}$ ou simplement l'on mettra un point entre les nombres entiers, & ceux qui expriment une fraction, dans cet exemple on écriroit $\frac{3605}{1000} = 3.605$. tous les nombres les plus à la gauche, séparés par le point, marquent des entiers, & ceux qui sont à la droite du point signifient

des nombres fractionnés de même dénomination que le diviſeur. Ce ſont des façons de calcul inventées pour aller plus vîte.

Avant que de finir cet article, je ferai remarquer à ceux qui connoiſſent déja le calcul, que par ma maniére de transformer un nombre entier en fraction j'évite le calcul *des fractions décimales* qui apportent toujours quelque embarras aux commençans, & dont je ne vois pas qu'ils retirent une grande utilité.

De l'extraction de la Racine cubique.

80. Nous nous conduirons dans cette opération, comme nous avons fait à l'égard de l'extraction de la racine quarrée: nous formerons un cube dont nous examinerons bien attentivement les parties, afin de découvrir l'artifice de leur formation; cet artifice une fois bien conçu, l'extraction des racines n'offre plus aucune difficulté. Commençons par la formation d'un cube Algébrique. On ſçait que le cube d'une quantité eſt le produit de cette même quantité par ſon quarré.

Soit donc la quantité $a + b$ élevée à ſon cube, c'eſt-à-dire, multiplions $a + b$ par $a + b$, nous aurons $aa + 2ab + bb$ qui eſt le quarré de $a + b$; ainſi pour en avoir le cube il faut multiplier ce quarré $aa + 2ab + bb$ par $a + b$, & l'on a au produit $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ un cube dont la quantité $a + b$ eſt la racine.

En examinant les différens termes de ce cube, je vois qu'il eſt composé, 1°. du cube a^3 du premier terme a de la racine. 2°. Du produit du quarré a^2 du premier terme a par le ſecond b triplé, ce qui eſt exprimé par $3a^2b$. 3°. Du produit du premier terme a par le quarré b^2 du ſecond triplé, ainſi que le montre l'expreſſion $3ab^2$. 4°. Du cube b^3

du second terme b. Voilà toutes les parties qui composent un cube dont la racine n'a que deux termes.

Voyons ce qu'elle contient quand elle en a trois. Faisons le cube de la quantité $a + b + c$ nous trouverons que ce cube est $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$ qui contient, outre le cube $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ des deux premiers termes, 1°. $3a^2c + 6abc + 3b^2c = a^2 + 2ab + bb \times 3 \times c$, c'est-à dire, le triple du quarrê des deux premiers termes par le troisiéme terme c. 2°. $3ac^2 + 3bc^2 = \overline{a + b} \times 3 \times c^2$ ou le triple de la somme des deux premiers termes par le quarré du troisiéme c. 3°. Enfin le cube c^3 du troisiéme terme.

S'il y avoit quatre termes à la racine, outre le cube des trois premiers termes, on trouveroit encore le triple du quarré des trois premiers termes par le quatriéme, plus le triple de la somme des trois premiers termes par le quarré du quatriéme avec le cube du quatriéme, &c.

Puisque nous sçavons maintenant ce qui compose un cube, la décomposition de ce cube ou l'extraction de la racine cubique ne doit pas nous couter beaucoup; il ne s'agit que de dégager, par le moyen de la division, ce que la multiplication a composé.

EXEMPLE

On propose de déterminer la racine cubique de la grandeur Algébrique $c^3 - 3c^2y - y^3 + 3cy^2$.

OPERATION.

$$\begin{array}{l|l} c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3 & c - y \\ -c^3 & \overline{+3c^2} \\ \hline * & \\ c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3 & \\ -c^3 + 3c^2y - 3cy^2 + y^3 & \\ \hline * \quad * \quad * \quad * & \\ \hline \end{array}$$

Disposons d'abord les termes de cette quantité suivant les degrés de la lettre d'origine c, comme on le voit dans l'opération. Et comme le premier terme c^3 est un cube, extrayons la racine cubique de ce terme ; on voit qu'elle est c ; nous écrirons c à la racine, & nous retrancherons de la puissance proposée le cube de cette racine. Après quoi pour trouver le second terme de la racine dans le reste $-3c^2y + 3cy^2$, &c. Comme nous sçavons que ce second terme est multiplié par le triple du quarré du premier terme c. Quarrons le terme c, & triplons-le, nous aurons $3c^2$ par lequel ils nous faut diviser $-3c^2y$, & il nous viendra $-y$ que nous écrirons à la racine ; mais comme dans un cube quelconque il y a toujours le cube des deux premiers termes d'une racine ; cubons donc $c - y$, & ôtons ce cube de la quantité proposée ; il ne reste rien : ainsi la grandeur $c - y$ est la véritable racine cubique cherchée.

Après avoir bien reconnu les parties qui composent un cube Algébrique, & en avoir fait l'analise, appliquons nos observations & nos régles à l'extraction des racines cubiques en nombres.

Extraction de la Racine cubique en nombres.

81. Nous supposerons pour cela que l'on sçache par cœur les cubes des neuf chiffres ; & si on ne les sçait pas, on consultera la Table suivante.

Table des quarrés & des cubes de tous les chiffres depuis 1 jusqu'à 9.

Racines	Quarrés	Cubes
1	1	1.
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Cette Table est très-facile à entendre : on voit que le quarré de 2 est 4, & que son cube est 8. Pareillement 125 est le cube de 5, &c. Dans cette Table les cubes des neuf chiffres sont accompagnés de leurs quarrés, parce que l'on a souvent besoin des quarrés des chiffres pour l'extraction de la racine cubique.

82. Observons d'abord qu'un cube ou un nombre quelconque, qui n'est composé que de trois chiffres, ne peut avoir deux chiffres à sa racine cu-

bique. Par éxemple, 999 n'aura pas deux chiffres à sa racine cubique ; puisque 10, qui est la plus petite racine composée de deux chiffres, donne 1000 à son cube, & cette quantité est composée de quatre chiffres. Ainsi tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 1000 exclusivement, ne pourront avoir qu'un chiffre entier à leur racine cubique.

De même tous les nombres qui contiendront plus de quatre chiffres, mais qui en auront moins que sept, n'auront pas trois chiffres à leur racine cubique. Ainsi 999999, le plus grand des nombres à six chiffres, n'aura pas trois chiffres à sa racine cubique ; car 100, qui est la plus petite quantité à trois chiffres, produit le cube 1000000 plus grand que le nombre 999999. Il sera aussi facile de remarquer qu'un nombre au-dessus de sept chiffres, mais au-dessous de dix, n'aura pas quatre chiffres à sa racine. Lorsqu'il sera au-dessus de dix, mais au-dessous de 13, il n'en aura pas cinq, & ainsi de suite en prenant pour limites les nombres 1, 4, 7, 10, 13, &c. dont la différence est 3.

On pourra donc par cette observation déterminer tout à coup le nombre des chiffres dont sera composée une racine cubique d'une quantité quelconque telle que 13|312|053, en la coupant par tranches dont chacune renferme trois chiffres en commençant de la droite vers la gauche : où il pourra arriver que la premiere tranche la plus à la gauche ne contiendra qu'un chiffre ; parce qu'une racine cubique peut être exprimée par un seul chiffre ; le nombre de ces tranches fera donc toujours connoître de combien de chiffres la racine cubique sera composée ; elle en contiendra trois dans cet éxemple, & cela doit être, parce que la quantité proposée étant au-dessus de sept chiffres, mais au-dessous de dix, ne pourra pas avoir plus de trois chiffres à sa racine.

83. Afin de sçavoir à présent comment nous connoîtrons chacun de ces chiffres, il nous faut composer un cube sur le modéle de la formation Algébrique : prenons le nombre 237, dont on trouveroit le cube, en multipliant son quarré par chacun des chiffres qui le composent; ce qui le fait distinguer en trois parties 200 + 30 + 7. Or pour élever à son cube une quantité numérique, composée de trois termes, nous nous servirons de la formule Algébrique $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + \overline{a^2 + 2ab + bb} \times 3c + \overline{a + b} \times 3c^2 + c^3$, qui est le cube de la quantité $a + b + c$ composée de trois termes, & où nous supposerons que $200 = a$, $30 = b$, $7 = c$.

Formation Algébrique du cube du nombre 237 ou 200 + 30 + 7.

8000000	a^3
3600000 . . .	$3a^2b$
540000 . . .	$3ab^2$
27000 . . .	b^3
1110900 .	$\overline{a^2 + 2ab + bb} \times 3c$
33810 .	$\overline{a + b} \times 3c^2$
343 . .	c^3
13312053	

Ainsi cette formule fait voir, à cause du cube a^3, que l'on doit écrire d'abord le cube 8000000 du premier terme 200. Ensuite 3600000, c'est-à-dire le triple du quarré du premier terme 200 par le second 30, représenté par $3a^2b$; après cela le

triple du quarré du ſecond terme 30 par le premier terme 200, c'eſt-à-dire 540000, comme l'indique $3ab^2$, & le cube 27000 du ſecond terme 30 exprimé par b^3. Outre cela 1110900, c'eſt-à-dire le triple du quarré des deux premiers termes 200 + 30 multiplié par le troiſiéme terme 7, ainſi que l'expreſſion correſpondante $\overline{aa + 2ab + bb} \times 3c$ le fait voir : de plus 33810, ou le triple de la ſomme des deux premiers termes 200 + 30 multiplié par le quarré du troiſiéme terme 7, ce que montre l'expreſſion $\overline{a + b} \times 3c^2$. Enfin le cube 343 du troiſiéme terme 7 exprimé par c^3. Et, faiſant l'addition de tous ces produits, on trouve que le cube du nombre 237 eſt 13312053, comme on l'auroit déterminé, en agiſſant à l'ordinaire; mais nous avons déja dit qu'on ne devoit point employer ici la méthode de la multiplication Arithmétique, parce que cette méthode faiſoit diſparoître l'artifice de la compoſition, ſans laquelle il ne paroît pas que l'on pût découvrir les loix de l'Analiſe.

Examinons préſentement où nous devons trouver chaque terme de la racine, dont nous venons de former le cube. 1°. Le premier terme, élevé au cube, a donné 8000000 qui eſt un nombre poſitif précédé de ſix chiffres; ainſi nous en retrouverons la racine cubique dans les deux termes 13 de la premiere tranche, qui ſont en effet précédés de ſix chiffres. 2°. Le triple du quarré du premier terme par le ſecond eſt 3600000, ou un produit de nombres poſitifs précédés de cinq chiffres; & par conſéquent l'on doit retrouver le ſecond terme de la racine, ſans aller plus loin que le premier chiffre 3 de la ſeconde tranche 312, parce que le nombre 3 eſt précédé de cinq chiffres. Enfin on découvrira où eſt pla-

té le troisiéme terme, en observant que ce terme est multiplié par le triple du quarré des deux premiers termes, dont le produit est 11109 précédé de deux zeros, comme on le voit dans sa véritable expression 1110900; ainsi l'on déterminera le troisiéme terme de la racine, sans aller plus loin que le premier terme 0 de la troisiéme tranche, ce terme etant précédé de deux chiffres.

S'il y avoit un plus grand nombre de tranches, quatre par exemple, on trouveroit le quatriéme terme de la racine, sans aller plus loin que le premier chiffre de la quatriéme tranche.

Puisque nous sçavons présentement le lieu de chaque terme de la racine, voyons comment nous l'en ferons sortir, c'est-à-dire, comment nous le dégagerons des autres nombres qui l'y retiennent; nous avons vû qu'il étoit lié à ces nombres par la multiplication; il faut donc, s'il est permis de parler ainsi, qu'il soit délié par la division.

Soit donc proposé le nombre 13312053 dont on demande la racine cubique.

OPERATION.

```
                    | 2 3 7 .      Racine
1 3|3 1 2|0 5 3     |----------
  8                 |     1 2      Diviseurs.
---                 | 1 5 8 7
  5 3
1 3 3 1 2
1 2 1 6 7
-----------
  1'1 4 5 0
-----------
```

Je le coupe en tranches qui renferment trois chif-

fres, en commençant de la droite vers la gauche. Dans cet éxemple la premiere tranche la plus à la gauche n'en contient que deux; elle pourroit même n'en contenir qu'un, par la raison que le cube du premier terme, que l'on trouve toujours dans la premiere tranche, peut être exprimé par un seul chiffre.

Cette premiere opération me fait juger d'abord que la racine cubique aura trois chiffres, & pour en déterminer le premier, je me rappelle la formation d'un cube où j'ai vu que le cube du premier terme d'une racine étoit toujours renfermé dans la premiere tranche; j'extrairai donc la racine cubique du nombre 13. La plus grande que je trouve est 2 que j'écris. Cubant 2 j'ai 8 que j'ôte de la premiere tranche, & il me reste 5, à côté duquel je descends le premier chiffre 3 de la seconde tranche 312; & je dois trouver dans 53 le second terme de ma racine, parce que nous avons fait observer que l'on devoit trouver le second terme de la racine, sans aller plus loin que le premier chiffre de la seconde tranche; nous sçavons d'un autre côté que ce second terme de la racine est multiplié par le triple du quarré du premier terme 2 que nous venons de trouver, c'est-à-dire, que ce terme cherché est multiplié par 12 (car le quarré de 2 est 4: & $4 \times 3 = 12$) je divise donc 53 par 12, l'opération me fait voir que je ne dois pas écrire 4 à la racine, parce que si je cubois 24, pour en retrancher le cube des deux premieres tranches, je trouverois un produit trop grand; je n'écris donc que 3, ce qui me produit 23 à la racine; & comme je sçais, par la formation d'une puissance cubique, que le cube des deux premiers termes 23 est renfermé dans les deux premieres tranches; je cube 23, j'en ôte le produit 12167 des nombres 13312, contenus dans les deux premieres tranches, que je

récris au-dessous du dividende 53, afin de pouvoir faire ma soustraction avec plus de facilité ; & il reste 1145, à côté desquels je descends le premier chiffre 0 de la troisiéme tranche, parce que la formation du cube nous a fait remarquer que l'on devoit retrouver le troisiéme terme d'une racine cubique, sans aller plus loin que le premier chiffre de la troisiéme tranche : nous avons appris aussi par cette même formation que ce troisiéme terme étoit multiplié par le triple du quarré des deux premiers termes 23 : quarrons donc 23, nous aurons 529 dont le triple = 1587, & divisons par ce triple le nombre 11450, nous aurons 7 au quotient, & la racine totalle sera 237, que l'on cubera pour se convaincre qu'elle est éxacte, puisque le cube de cette quantité redonnera 13312053.

Second Exemple d'une extraction de racine cubique.

Pour extraire la racine cubique du nombre 140608, je le coupe en tranches, & je vois d'abord que ma racine n'aura que deux chiffres.

OPERATION.

140|608	52	
125	75	Diviseur
156		

J'extrais donc la racine cubique de la premiere tranche ; je trouve qu'elle est 5 ; si je ne le voyois pas d'abord je consulterois la table (n°. 81.) je cube 5 & j'ai 125, que j'ôte de la premiere tranche

140 ; il reste 15, à côté desquels je descends le premier chiffre 6 de la seconde tranche, pour avoir 156 à diviser par le triple du quarré 5 = 75 : or divisant 156 par 75 on a 2 que l'on écrit à la racine qui est alors 52 : on cube 52, & trouvant que son produit = 140608, on est assuré que 52 est éxactement la racine cubique cherchée.

TROISIEME EXEMPLE.

On extrayera la racine cubique de 219255227 en le coupant d'abord en trois tranches, qui feront juger que la racine doit avoir trois termes.

OPERATION.

	6 0 3 Rac.
2 1 9 | 2 5 5 | 2 2 7	1 0 8 Divis.
2 1 6	1 0 8 0 0
. . 3 2	
2 1 9 2 5 5	
2 1 6 0 0 0	
. . 3 2 5 5 2	

Après cela on extrayera la racine cubique de la premiére tranche 219, & l'on verra par la table (n°. 81.) qu'elle ne peut être que 6 : on écrira 6 à la racine. On en fera le cube 216 que l'on ôtera de 219 & il restera 3, à côté duquel on descendra le premier chiffre 2 de la seconde tranche 255 : on triplera le quarré du premier terme 6 de la racine, & l'on aura 108 par lesquels divisant 32 il vient 0 que l'on écrit à la racine : on fait le cube

216000 des deux premiers termes 60, que l'on retranche des deux premieres tranches 219|255, & il reste 3255, à côté desquels on descend le premier chiffre 2 de la troisiéme tranche 227 pour avoir 32552 à diviser par 10800, c'est-à-dire, par le triple du quarré des deux premiers termes 60 de la racine, & dont le quotient est 3 que l'on écrit à la racine. Après quoi élevant au cube la racine 603, elle produit 219255227, ce qui prouve que cette racine est éxacte.

Il est très-rare de trouver une racine cubique éxacte; mais cet inconvénient ne fait qu'allonger le calcul; car l'on approche de cette racine aussi près que l'on veut, en suivant la méthode dont nous avons fait usage (n°. 79.) pour l'approximation à l'infini de la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas quarré.

Approximation de la racine cubique dans les cas où il n'est pas possible d'avoir cette racine à la rigueur.

84. Soit le nombre 35 dont on demande la racine cubique qui n'est pas possible à la rigueur, mais dont on voudroit n'être pas éloigné de $\frac{1}{100}$.

On multipliera le nombre 35 par une quantité dont la racine cubique soit 100. Or le cube de 100 est 1000000, par conséquent on écrira 35000000 & l'on divisera ce produit par 1000000, afin d'avoir l'espéce de fraction $\frac{35000000}{1000000} = 35$ dont il s'agit d'avoir la racine.

OPERATION.

```
                  | 3 2 7
3 5|0 0|0 0|0 0   |--------
2 7               | 2 7
                  | 3 0 7 2
---
  8 0
3 5 0 0 0
3 2 7 6 8
---------
. 2 2 3 2 0
3 5 0 0 0 0 0 0
3 4 9 6 5 7 8 3
---------------
. . . 3 4 2 1 7
---------------
```

Mais on a la racine cubique d'une fraction, en extrayant la racine cubique de son numérateur & de son dénominateur; par exemple, la racine cubique de $\frac{8}{27}$ est $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire, une fraction dont le numérateur est la racine cubique du numérateur 8 & dont le dénominateur est aussi la racine cubique du dénominateur 27 : par conséquent pour avoir la racine cubique de 35 sous la forme de $\frac{35000000}{1000000}$, on extrayera simplement la racine cubique du numérateur 35000000; car on sçait que celle du dénominateur 1000000 est 100; on trouvera que cette racine cubique est $\frac{327}{100}$ & même quelque chose de plus; car si l'on cube 327 & que l'on ôte ce produit de 35000000, il y aura 34217 de reste; ainsi il ne s'en faut pas $\frac{1}{100}$ que l'expression $\frac{327}{100}$ ne soit éxactement la racine cubique de 35.

On pourroit approcher beaucoup plus près de la racine cubique de 35; c'est pourquoi, afin que

l'on sçache comment l'on doit se conduire dans ces sortes d'approximations ; il faut retenir la régle que nous allons proposer.

Quand on voudra approcher d'une racine cubique à $\frac{1}{1000}$ près ; on multipliera le nombre proposé par une quantité dont 1000 soit la racine cubique ; & si l'on vouloit en être plus près que de $\frac{1}{10000}$; on le multiplieroit par un nombre dont la racine cubique seroit 10000, &c. & par-là on évitera le calcul des décimales qui paroît toujours un peu compliqué aux jeunes gens.

J'ai remarqué que ce calcul leur coutoit, qu'ils n'aimoient point à en faire usage, parce que la façon de ce calcul ne paroît pas assez déduite de la maniére d'opérer sur les fractions ordinaires ; c'est ce qui m'a déterminé à transformer les nombres entiers, qui n'ont pas une racine éxacte, sous la forme d'une fraction, & d'en tirer la racine, comme on le fait par rapport aux fractions vulgaires ; ainsi, sans introduire un nouveau calcul, j'en retire néanmoins tous les avantages.

De la Formation des Equations & de leur analise.

85. Une *Equation* est l'expression d'une même valeur sous différens noms : quand je dis que 50 divisé par 10 donne 5, je fais une équation à laquelle je puis donner cette expression $\frac{50}{10} = 5$, où l'on voit qu'une équation s'exprime, en mettant le signe $=$ entre deux valeurs égales qui n'ont pas un même nom. Les termes qui sont à gauche du signe $=$ sont le *premier membre* de l'équation, & ceux qui sont à droite de ce même signe en forment le *second membre*.

Quoique $\frac{50}{10} = 5$ soit la forme sous laquelle on produise une équation ; ce n'est pas en considéra-

tion de ces grandeurs connues que l'on a inventé les équations ; car une quantité connue n'a pas besoin de deux noms ; mais si l'on propose de déterminer un nombre lequel multiplié par 7 produise 441 : comme on ne voit pas tout d'un coup le nombre qui a cette propriété, on est obligé de le comparer à la quantité qui lui est égale suivant les conditions de la question : c'est pourquoi, donnant un nom à ce nombre inconnu ou indéterminé, l'appellant par éxemple x, je forme l'équation $x \times 7$ ou $7x = 441$. & la raison pour laquelle je donne un nom à ce nombre inconnu, c'est afin de voir comment il se combine dans toutes les opérations auxquelles on peut le soumettre.

Nous voilà sans doute arrivés à la partie brillante de l'Algébre ; à cette espéce de *machine à découverte*, si l'on peut s'exprimer ainsi, qui ménage si avantageusement les forces de notre esprit. L'état d'une question bien conçu, & son équation une fois bien établie, on peut assurer que le problême est résolu ; il n'y a plus que quelques petites façons de calcul que nous allons enseigner, moyennant lesquelles on trouve une résolution sans aucun effort de génie & même quelque fois sans y penser : ainsi l'esprit, n'usant pas sa vigueur, en devient plus propre à embrasser une multitude d'objets.

Par tout ce que nous venons de dire on peut juger que ce sont les équations qui ont donné naissance à l'Algébre. On a remarqué qu'une question à résoudre, ou autrement un problême, renfermoit nécessairement une équation, où il s'agissoit de comparer une grandeur inconnue à des quantités connues. Il a fallu par conséquent donner des noms différens à ces grandeurs.

On est convenu que les quantités connues, qui entrent dans un problême, seroient exprimées par

les premieres lettres de l'alphabet a, b, c, d, &c. & que les derniéres lettres x, y, z, &c. serviroient à l'expression des inconnues.

Il y a donc des grandeurs connues & des grandeurs inconnues dans un problême; on cherche à y déterminer la valeur des inconnues, c'est-à dire, à les égaler à des grandeurs connues; or cela ne se peut faire qu'en employant les différentes opérations de l'Algébre, qui, comme nous l'avons dit, n'est autre chose que le calcul des grandeurs indéterminées : on ajoute, on soustrait, on multiplie, on divise, &c. selon que la nécessité s'en présente : tout ce que l'on fait sur les équations, afin d'en dégager les inconnues, s'appelle en général *la Réduction des Equations*.

De la Réduction des Equations.

86. La Réduction des équations consiste à mettre seul dans un membre le terme qui renferme l'inconnue de l'équation.

1°. Cela s'éxécute avec l'addition. Vous avez l'équation $x - a = c$: il est clair qu'en mettant $+ a$ dans l'un & l'autre membre de cette équation, il y aura toujours égalité; ainsi cette équation deviendra $x - a + a = c + a$; or $- a$ & $+ a$ se détruisent; par conséquent l'équation réduite est $x = c + a$; & l'addition, que nous avons faite, n'a point altéré l'équation proposée; car des grandeurs égales ne cessent pas de l'être quand elles sont également augmentées.

Pour dégager y de l'équation $y - c - d = f + m$, j'ajoute à chaque membre de l'équation $+ c + d$, & j'ai $y - c - d + c + d = f + m + c + d$, c'est-à-dire, en

effaçant $- c - d + c + d$ qui se détruisent; que l'équation devient $y = f + m + c + d$, où la quantité y est dégagée.

De même on dégageroit y, en faisant une soustraction de grandeurs égales. Soit l'équation $y + d = b + f$; ôtez $+ d$ de part & d'autre vous aurez $y + d - d = b + f - d$, c'est-à-dire, $y = b + f - d$, & la quantité inconnue est dégagée.

Remarquez donc que l'on dégage une inconnue par la voye de l'addition & de la soustraction en faisant disparoître, du membre où est l'inconnue, tous les termes qui l'accompagnent, & en écrivant ces mêmes termes dans l'autre membre avec des signes contraires: ainsi $x - a + d = g + m$ devient $x = g + m + a - d$.

87. Par cette méthode l'on peut rendre tous les termes d'une équation positifs & même les faire passer tous dans un seul membre; car l'équation $aa - 2bc + dd = 2cd - 3r - 4f$ peut devenir $aa + 3r + 4f + dd = 2cd + 2bc$, en faisant passer les termes négatifs dans un autre membre avec des signes contraires.

Cette dernière équation $aa + 3r + 4f + dd = 2cd + 2bc$ deviendra, si l'on veut, $aa + 3r + 4f + dd - 2cd - 2bc = 0$ ou $2cd + 2bc - aa - 3r - 4f - dd = 0$, par la raison qu'une quantité se réduit à rien, quand on en retranche une grandeur égale à cette quantité.

88. On fait aussi usage de la multiplication pour chasser les grandeurs qui accompagnent l'inconnue d'une équation; or cela ne peut arriver que dans le cas où l'inconnue est divisée par quelqu'autre quantité: il n'y a que les contraires qui puissent réciproquement se détruire.

Vous propose-t'on l'équation $\frac{yy}{2b} = f + g$, où il faut dégager yy, & par conséquent chasser $2b$ qui la divise ? Dites, deux grandeurs égales multipliées par une même grandeur donnent des produits égaux, & puisque la grandeur yy est divisée par $2b$, multiplions l'un & l'autre membre de l'équation par la quantité qui divise ; nous aurons $\frac{yy \times 2b}{2b} = \overline{f + g} \times 2b$, ou $yy = 2bf + 2bg$, & l'inconnue yy est dégagée : il est donc très facile de transformer une équation, où il y a des fractions, en une autre équation qui en soit totalement délivrée, puisqu'une fraction réduite à sa véritable idée est une division pure (n°. 34.).

L'équation $2c + \frac{m}{d} = a + b$, en multipliant tous ses termes par le dénominateur d, deviendra $2cd + m = ad + bd$; & s'il y avoit plusieurs fractions dans une équation, comme $ds + \frac{cm}{a} + \frac{r}{t} = bx - \frac{fg}{p}$, on multiplieroit tous les termes de cette équation par le produit apt de tous les dénominateurs, & l'on auroit l'équation $adpst + cmpt + apr = abptx - afgt$ où les fractions sont évanouies.

89. Puisque la multiplication fait évanouir les grandeurs qui divisent l'inconnue ; réciproquement la division chassera les quantités qui accompagneront l'inconnue par voye de multiplication ; vous avez $abx = 3cd + 2r$: divisez l'un & l'autre membre par la quantité ab qui multiplie l'inconue x, l'équation subsistera toujours (car des grandeurs égales divisées par une même grandeur donnent des quotiens égaux) vous aurez $\frac{abx}{ab} =$

$= \frac{3cd + 2r}{ab}$ ou, en faisant évanouir ce qui se détruit, $x = \frac{3cd + 2r}{ab}$, équation ou le produit ab ne paroît plus dans le premier membre; mais il fait la fonction de diviseur dans le second.

Voulez-vous encore dégager l'inconnue z de l'équation $2dm - cr = fz - gz$? Remarquez que le second membre $fz - gz = z \times \overline{f - g}$: ainsi, $f - g$ multipliant l'inconnue z, vous diviserez l'un & l'autre membre de l'équation proposée par $f - g$, ce qui produira $\frac{2dm - cr}{f - g} = \frac{fz - gz}{f - g}$, c'est-à-dire, en effaçant ce qui se détruit, $z = \frac{2dm - cr}{f - g}$.

Cette maniére de dégager une inconnue est aussi fort propre à simplifier une équation, dont tous les termes sont multipliés par une même grandeur: comme on s'apperçoit facilement que tous les termes de l'équation $b^2x - b^2c = ab^2 + b^3$ sont multipliez par la quantité b^2; puisque l'on peut produire cette équation sous la forme $\overline{x - c} \times bb = \overline{a + b} \times bb$, où il est visible que bb multiplie l'un & l'autre membre de l'équation; on divisera donc par bb, & l'on aura $\frac{b^2x - b^2c}{bb} = \frac{ab^2 + b^3}{bb}$ ou, en faisant évanouir ce qui se détruit, $x - c = a + b$: équation beaucoup plus simple que la précédente; &, si l'on transpose $-c$, la derniére équation deviendra $x = a + b + c$, où l'inconnue x est entiérement dégagée.

Quand tous les termes d'une équation ne seroient pas multipliés par une même grandeur, pourvu

qu'il y en eut plusieurs, on ne laisseroit pas de simplifier l'équation : par exemple, $axx + bc = adf - 2ag$ est une équation où l'on peut faire évanouir la grandeur a de tous les termes où elle se trouve : en divisant tous les termes de l'équation par a, elle deviendra $\frac{axx}{a} + \frac{bc}{a} = \frac{adf}{a} - \frac{2ag}{a}$; ce qui se réduit à l'équation $xx + \frac{bc}{a} = df - 2g$. Et enfin, en dégageant totalement l'inconnue, $xx = df - 2g - \frac{bc}{a}$, &c.

90. Assez souvent l'extraction des racines sert à simplifier une équation ; car, si de grandeurs égales on peut extraire une même racine, il est certain qu'il y aura toujours équation ; mais, comme il n'est pas rare qu'un membre d'une équation ait une racine éxacte, tandis que l'autre membre n'en a pas, on a imaginé le signe $\sqrt{}$ pour marquer qu'il s'agit d'extraire une racine des quantités qui sont sous ce signe ; &, afin de désigner le degré de cette racine, on écrit son exposant entre les branches de ce signe, que nous appellerons dans la suite *signe radical* ; ainsi $\sqrt[2]{ac}$ signifie qu'il faut extraire la racine quarrée ou seconde de ac. $\sqrt[3]{b^2c}$ exprime la racine troisiéme ou cubique de b^2c, &c. $\sqrt{}$ sans aucun nombre est censé signifier $\sqrt[2]{}$.

On veut dégager l'inconnue x de l'équation $b^2x^2 = am$. Le premier membre de cette équation étant un quarré parfait, on extrayera la racine quarrée du premier membre, & on affectera le second du signe radical. L'équation $b^2x^2 = am$ deviendra donc $bx = \sqrt[2]{am}$; & di-

visant l'un & l'autre membre par b on aura $x =$
$= \frac{\sqrt[2]{am}}{b}$.

Par la même raison vous dégagerez l'inconnue de l'équation $xx - 2cx + cc = 3b$, dans laquelle le premier membre est un quarré éxact de la quantité $x - c$. Ainsi, en tirant la racine quarrée du premier membre, on mettra sous le signe radical l'autre membre qui n'est pas quarré, & l'équation sera $x - c = \sqrt[2]{3b}$, ou, en transposant $-c$, $x = c + \sqrt{3b}$.

91. Soit encore l'équation $yy - 2by +$ $+ bb = f^2$ dont il faut dégager l'inconnue y. Comme on s'apperçoit que les deux membres de cette équation sont des quarrés parfaits, on extraira la racine quarrée de l'un & l'autre membre; ce qui produira $y - b = f$, où il est important d'observer que le second membre f peut être précédé du signe $+$ ou du signe $-$; car $+f \times +$ $+ f = + ff$; mais $-f \times -f$ produit aussi $+ff$.

D'où il suit que l'équation précédente est susceptible de cette expression $y - b = \pm f$: ce qui signifie que la quantité $y - b$ peut être $+f$ ou $-f$. Si on la suppose $= +f$; en transposant b, l'équation deviendra $y = b + f$: mais, en supposant qu'elle soit $-f$, on aura $y = b -$ $-f$. Or $b - f$ est fort différent de $b + f$ que nous avons aussi trouvé pour la valeur de y. L'inconnue peut donc avoir deux valeurs différentes dans une équation du second degré (a).

(a) Nous avons supposé $y - b = +f$, & $y - b =$ $= -f$. On pourroit nous dire que nous aurions dû aussi

92. Quoiqu'une équation du second degré ne paroiſſe avoir aucun de ſes membres qui ſoient des quarrés parfaits, comme $xx + bx = s$; ce n'eſt pas à dire que l'on n'en puiſſe pas dégager l'inconnue x par l'extraction de la racine quarrée, car en obſervant ce qui manque au premier membre $xx + bx$ pour être un quarré parfait : il eſt évident que, ſi j'augmente ce membre de ce qui lui eſt néceſſaire, je pourrai dégager l'inconnue x à l'ordinaire.

Pour déterminer donc la grandeur dont l'addition peut rendre le membre $xx + bx$ un quarré parfait; je prends une grandeur $y + c$, dont je forme le quarré $yy + 2cy + cc$ ou je remarque que le troiſiéme terme cc eſt le quarré de la moitié de la quantité $2c$ qui multiplie l'inconnue dans le ſecond terme. J'applique donc cette obſervation à l'équation propoſée $xx + bx = s$. Je prends la moitié de la quantité b qui multiplie l'inconnue x

prendre $b - y$ pour la racine du premier membre; car le quarré de $b - y = bb - 2by + yy$ eſt préciſément la même choſe que le quarré de $y - b = yy - 2by + bb$, & l'on auroit alors $b - y = + f$ & $b - y = - f$; ce qui eſt vrai : mais il faut remarquer que ces deux derniéres équations reviennent au même que les deux précédentes, comme il eſt facile de le voir, en tranſpoſant les termes.

Cependant il reſte toujours une difficulté. Comment conçoit-on que $y - b = + f$, & $y - b = - f$, c'eſt-à-dire, que la même quantité $y - b$ ſoit poſitive & négative en même temps ?

Cela n'eſt pas effectivement concevable. Conſidérez donc que l'indéterminée y peut être plus grande ou plus petite que b; ſi l'indéterminée y eſt plus grande que b, l'équation $y - b = + f$ exprime une racine poſitive; mais, ſi l'indéterminée y eſt plus petite que b, la racine de cette équation eſt négative, c'eſt pourquoi on l'exprime auſſi par $y - b = - f$.

dans le second terme, & j'ai $\frac{b}{2}$; l'élevant au quarré, cela me donne $\frac{bb}{4}$: je l'ajoute à l'un & l'autre membre de mon équation, qui devient $xx + bx + \frac{bb}{4} = s + \frac{bb}{4}$ où le premier membre est un quarré parfait ; j'en extrais donc la racine quarrée, cela me produit $x + \frac{b}{2} = \pm \sqrt[2]{s + \frac{bb}{4}}$, & transposant $+ \frac{b}{2}$, j'ai $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt[2]{s + \frac{bb}{4}}$ où x est entiérement dégagée.

95. Quand les membres d'une équation, dont on veut dégager l'inconnue, sont affectés du signe radical $\sqrt{}$ accompagné d'un exposant quelconque, on peut faire évanouir ce radical en élevant l'un & l'autre membre de l'équation au degré marqué par l'exposant du radical : soit, par exemple, l'équation $\sqrt[3]{a + x} = 2bd$; si l'on éléve au cube l'un & l'autre membre de cette équation, elle se transformera en celle-ci $a + x = 8b^3d^3$; d'où l'on tire $x = 8b^3d^3 - a$.

On ne doit pas être surpris de voir qu'en élevant au cube le membre $\sqrt[3]{a + x}$, on ait pour produit la quantité $a + x$ qui est sous le signe radical ; car l'expression $\sqrt[3]{a + x}$ signifie la racine cubique de la quantité $a + x$: or, si l'on fait disparoître le signe radical $\sqrt[3]{}$, cela veut dire que l'on ne tire pas la racine cubique de la quantité $a + x$, qui est par conséquent un cube, puisqu'on lui supposoit une racine cubique.

S'il y avoit même un radical sous un radical dans une équation, on ne laisseroit pas que de dégager l'inconnue par cette méthode. Vous avez l'équation $\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{b - x}} = bm$: élevez au cube l'un & l'autre membre de cette équation, il viendra $a + \sqrt[2]{b - x} = b^3m^3$, en exterminant le signe $\sqrt[3]{}$ du premier membre ; parce qu'une grandeur est élevée a son cube ou à sa troisiéme puissance, lorsque l'on détruit ce qui l'en faisoit descendre.

Mais dans l'équation $a + \sqrt[2]{b - x} = b^3m^3$, la quantité inconnue $- x$ n'est pas encore dégagée; ainsi, après avoir fait passer la lettre a dans l'autre membre, on trouve l'équation $\sqrt[2]{b - x} = b^3m^3 - a$; d'où l'on déduit, en quarrant l'un & l'autre membre, $b - x = b^6m^6 - 2ab^3m^3 + aa$; donc enfin, en transposant la lettre b, on aura $- x = b^6m^6 - 2ab^3m^3 + aa - b$, équation où la quantité inconnue x est négative. On la rendra positive, en faisant que le premier membre devienne le second, & le second membre devienne le premier; ce qui donnera l'équation finale $2ab^3m^3 + b - aa - b^6m^6 = x$.

Que l'on ne néglige pas cette méthode de faire évanouir les signes radicaux, nous aurons occasion d'en faire usage.

94. Une équation peut contenir différentes inconnues; on fera ensorte de les chasser toutes, excepté une : vous avez l'équation $2x + m = c + y$, & vous sçavez d'ailleurs que $x = bd$. Donc $2x = 2bd$; ainsi vous pouvez substituer $2bd$ à la place de $2x$, & l'équation proposée deviendra $2bd + m = c + y$, où il n'y a plus que l'in-

connue y qui sera entiérement dégagée, en transposant la lettre c; car alors $y = 2bd + m - c$.

Soit encore l'équation $\frac{xx}{a-b} + 3z = bd - 4y$, que vous voulez réduire à une seule inconnue; parce que l'état de la question vous a fait découvrir que $x = d$ (car ce sont les conditions du problême qui font naître les équations) donc $xx = dd$, & $\frac{xx}{a-b} = \frac{dd}{a-b}$: vous pouvez donc substituer $\frac{dd}{a-b}$, à la place de $\frac{xx}{a-b}$, dans l'équation précédente, qui deviendra $\frac{dd}{a-b} + 3z = bd - 4y$ ou il n'y a plus que les deux inconnues z, y. Je suppose à présent que l'on trouve encore, en réfléchissant attentivement à la question, que $z = \frac{a}{b}$; donc $3z = \frac{3a}{b}$; par conséquent, en substituant $\frac{3a}{b}$ à la place de $3z$ dans la derniére équation, elle deviendra $\frac{dd}{a-b} + \frac{3a}{b} = bd - 4y$ où il n'y a plus que l'inconnue y. Vous la transposerez dans l'autre membre, & vous aurez $4y + \frac{dd}{a-b} + \frac{3a}{b} = bd$; transposant encore les deux termes qui accompagnent cette inconnue, l'équation sera $4y = bd - \frac{dd}{a-b} - \frac{3a}{b}$; & enfin divisant ses deux membres par le nombre 4, elle deviendra $y = \frac{bd}{4} - \frac{dd}{4a-4b} - \frac{3a}{4b}$, où l'inconnue y est entiérement dégagée.

Il n'est pas besoin d'en dire davantage. Ces maniéres de préparer une équation vont être appliquées à la résolution de quelques Problêmes qui en feront sentir toute l'importance.

De la Résolution des Problêmes.

Nous ne prescrirons pas, suivant la coutume, de grandes régles générales pour la résolution des Problêmes : ce seroit nous exposer à n'être pas entendus. Il nous a toujours paru que le vrai moyen de cultiver l'esprit étoit de faire découvrir les régles par le seul bon sens, & de les établir ensuite : ainsi proposons-nous quelques Problêmes, & remarquons bien les moyens de résolution que la simple lumiére naturelle nous fournit.

PROBLÊME I.

95. Un Coureur sçait qu'il va quatre fois plus vîte qu'un autre; il parie qu'il arrivera plutôt que lui à un endroit éloigné de 15 lieues de celui où la gageure est proposée; l'autre accepte la proposition à condition qu'on lui donnera 11 lieues d'avance : on demande lequel des deux gagnera.

RESOLUTION.

Il est évident que le Problême sera résolu, si l'on détermine la distance où le premier Coureur doit atteindre son Adversaire; si c'est au-delà du but, il a perdu; mais en deçà, il a gagné. J'appelle x le chemin que fera celui qui a 11 lieuës d'avance avant que d'être rencontré par le premier Coureur; ainsi dans ce moment-là son état sera $11 + x$; & comme le premier Coureur est supposé aller quatre fois plus vîte que son adversaire, quand ils se rencontreront, le premier Coureur aura fait quatre fois plus de chemin, c'est-à-dire, $4x$; mais à l'instant de rencontre ils seront également éloignés du

premier point de partance ; voilà donc une égalité ; ainsi $11 + x = 4x$, & la question est réduite à une équation dans laquelle il faut dégager l'inconnue x.

Otons x de part & d'autre, il reste $11 = 3x$. Divisons l'un & l'autre membre par 3, nous aurons $\frac{3 \times x}{3} = \frac{11}{3}$ ou $x = \frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$. Celui qui a 11 lieues d'avance n'aura donc fait que 3 lieues & $\frac{2}{3}$ de lieues, quand il sera atteint par le Coureur : joignons ce chemin aux 11 lieues d'avance, cela produit 14 lieues & $\frac{2}{3}$ de lieue ; le premier Coureur a donc gagné, puisqu'il atteint son Adversaire $\frac{1}{3}$ de lieue avant le but, que l'on a supposé à 15 lieues de distance.

96. Tout l'essentiel de la résolution d'un Problême consiste, comme l'on voit, à construire l'équation qui l'exprime ; l'équation une fois construite, il ne s'agit plus que de dégager les inconnues ; nous en avons donné les régles : par ce dégagement les inconnues sont égalées à des grandeurs connues, & le Problême est résolu, s'il est possible, & s'il ne l'est pas, l'équation le fera voir encore ; ce qui est une véritable résolution : car on ne peut résoudre un Problême que de deux maniéres, ou en déterminant ce que l'on demande, ou en faisant voir que l'on a proposé une chose absurde.

Bien des gens ont entendu parler du fameux Problême de la *quadrature du cercle* (a). Ceux qui démontreront que cette quadrature est impossible, auront résolu le Problême à la rigueur ; c'est pourquoi il faut attendre que cette impossibilité soit démontrée avant que de condamner ceux qui s'appli-

(a) La quadrature du cercle consiste à trouver une surface, renfermée dans un quarré, égale à une surface renfermée dans un cercle.

quent à la résolution de ce Problême ; tout ce qu'il y auroit à leur dire, seroit de les inviter à s'appliquer autant à découvrir les raisons contraires à la possibilité de cette quadrature, qu'ils paroissent décisifs, quand ils font valoir les moyens qui lui sont favorables.

97. Nous avons dit que ce qu'il y avoit de plus important dans la résolution d'un Problême étoit de trouver son équation ; il n'y a point de régle à donner là-dessus : cela dépend de la sagacité de celui qui en tente la résolution. Il n'est pas besoin de dire que l'on doit se rendre très-attentif à l'état de la question ; qu'il faut en bien considérer les conditions, ce qui s'appelle autrement, *les données* du Problême ; que c'est toujours en conséquence de ces données que la résolution doit se faire ; que l'augmentation ou la diminution des données change le Problême ; que le nombre des inconnues, comme celui des données, doit être déterminé avec soin ; qu'en un mot on ne doit faire entrer dans l'équation d'un Problême ni plus ni moins que ce qui est accordé, le bon sens faisant assez comprendre que le moindre changement de circonstances change nécessairement le Problême. On prouve enfin que l'on a trouvé la véritable valeur des inconnues, en faisant voir qu'elles satisfont à la question.

Par exemple, en résolvant le Problême ci-dessus, nous avons trouvé que le Coureur atteindroit celui qui a 11 lieues d'avance, lorsque ce dernier auroit fait 3 lieues & $\frac{2}{3}$ de lieue, c'est-à-dire, lorsqu'il seroit éloigné de 14 lieues & $\frac{2}{3}$ du premier point de partance ; il faut donc prouver que le premier Coureur aura parcouru 14 lieues $\frac{2}{3}$, quand son Adversaire aura fait 3 lieues & $\frac{2}{3}$ de lieue. Or, suivant l'état de la question, le premier Coureur doit avoir fait 4 fois plus de chemin que son Ad-

verfaire ; c'eſt donc 4 fois 3 lieues & $\frac{2}{3}$ = 12 + $\frac{8}{3}$ = 14 + $\frac{2}{3}$: par conſéquent le premier Coureur ſera auſſi avancé que ſon Adverſaire après que celui-ci aura ſeulement parcouru 3 lieues & $\frac{2}{3}$.

PROBLEME SECOND.

98. Il y a des montres qui portent trois aiguilles ; l'une marque les heures, une autre les minutes, & la troiſiéme eſt pour les ſecondes. L'aiguille des minutes & celle des ſecondes ſont ſuppoſées partir du même point ; mais l'aiguille des ſecondes, qui va 60 fois plus vîte que celle des minutes, prendra ſur le champ les devans ; on voudroit ſçavoir à quel point l'aiguille des ſecondes rattrapera celle des minutes ?

RESOLUTION.

Suppoſons que les deux aiguilles partent toutes deux du même point de midi. L'aiguille des ſecondes fait ſa révolution ou le tour du quadran en une minute : ainſi après une minute de temps l'aiguille des ſecondes ſe retrouvera ſur le même point de midi, & l'aiguille des minutes ſera avancée d'une minute de chemin vers le point d'une heure ; alors l'aiguille des minutes a une minute d'avance ſur l'aiguille des ſecondes, en comptant du point de midi.

Cette réſolution revient à celle du Problême précédent. Appellons x le chemin qu'aura fait l'aiguille des minutes lorſqu'elle ſera rencontrée par celle des ſecondes ; comme cette aiguille eſt ſuppoſée avoir une minute d'avance, toute ſa diſtance au-delà du point de midi ſera $1 + x$, & au point de rencontre l'aiguille des ſecondes ſera $60\,x$; elles au-

ront fait le même chemin depuis le point de midi, donc $1 + x = 60x$: ôtons x de part & d'autre, nous aurons $1 = 59x$. Divisons l'un & l'autre membre par 59, l'équation deviendra $x = \frac{1}{59}$ de minute; c'est-à-dire, que l'aiguille des secondes rencontrera l'aiguille des minutes à la fin de la premiere cinquante-neuviéme partie de la seconde minute. Ce qui est fort aisé à prouver; car l'aiguille des minutes & celle des secondes doivent être également éloignées de midi au point de rencontre; or cela arrivera; car x étant $\frac{1}{59}$, toute la distance de l'aiguille des minutes au-delà du point de midi sera $1 + \frac{1}{59}$ de minute : mais, puisque l'aiguille des secondes va soixante fois plus vîte que celle des minutes, l'expression de son chemin doit être $60x$ ou $\frac{60}{59} = 1 + \frac{1}{59}$, comme celle des minutes.

PROBLEME III.

99. On peut résoudre par ce même moyen une infinité de Problêmes. Celui d'Achille & de la Tortue est fameux. Zenon, Philosophe ancien très-subtil, & peut-être Sophiste de bonne foi, lui a donné beaucoup de réputation. Ce Philosophe avoit pris à tâche de prouver qu'il n'y avoit point dans la nature de mouvement continu; que tous les mouvemens de la nature étoient interrompus par de petits repos. Pour faire entendre cette idée, que nous ne prétendons point approuver, Zenon auroit pû comparer le mouvement des corps à celui de l'aiguille d'un cadran qui ne va que par sauts, insensibles dans l'aiguille des heures & celle des minutes, mais très-évidens dans celle des secondes, si nos montres avoient éxisté de son temps.

Achille étoit, selon Homére, très-léger à la course, & la Tortue y est fort pésante. Si le mou-

vement des corps, disoit Zenon, n'est interrompu par aucun repos, il ne sera jamais possible qu'Achille atteigne la Tortue, qui auroit sur lui une lieue d'avance; car supposons qu'Achille aille dix fois plus vîte que la Tortue; puisque ces deux mobiles vont sans aucune interruption; quand Achille aura fait une lieue, la Tortue aura fait la dixiéme partie de la seconde lieue; quand Achille parcourra cette dixiéme partie, la Tortue fera la dixiéme partie de cette dixiéme partie ou $\frac{1}{100}$: Achille parcourt-il cette centiéme partie, la Tortue s'avancera encore du dixiéme de ce centiéme, c'est-à-dire de $\frac{1}{1000}$, &c. ainsi elle sera toujours en avant, ce qui est contraire à l'expérience; un corps n'est donc plus lent qu'un autre, concluoit Zenon, qu'à cause d'un plus grand nombre de repos, dont son mouvement est interrompu.

Il réduisit l'ancienne Philosophie à parler fort long-temps sur cette objection, & la moderne ne l'a pas crue indigne de son éxamen. Les Mathématiciens ont pris un autre parti : ils supposent, ce dont on convient de part & d'autre, qu'il y a dans la nature des vîtesses plus ou moins grandes, & sans s'embarrasser comment cela peut être, ils s'attachent à déterminer précisément le point où Achille rencontrera la Tortue.

RESOLUTION.

Pour cela soit x le chemin qu'aura fait la Tortue, lorsqu'Achille la rencontrera, & comme elle a une lieue d'avance, son éloignement du point d'où Achille doit partir, sera $1 + x$; mais, par la supposition, Achille parcourant le même espace, fera 10 fois plus de chemin que la Tortue. Ainsi $1 + x = 10x$: donc $1 = 9x$, & $x = \frac{1}{9}$ de

lieue : c'est-à-dire qu'Achille rencontrera la Tortue à la fin de la premiere neuviéme de la seconde lieue ou après avoir parcouru une lieue & $\frac{1}{9}$ de lieue ; car la Tortue faisant $\frac{1}{9}$ Achille fera $\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}$; ainsi Achille & la Tortue seront également éloignés du premier point de partance.

PROBLEME IV.

100. Deux hommes partent en même temps ; l'un de Paris pour Lyon, & l'autre de Lyon pour Paris, tous deux par le même chemin : le premier fait 7 lieues en deux heures, & le second n'en fait que 5 pendant le même temps : à quelle distance de Lyon & de Paris ces deux hommes se rencontreront-ils ? Nous supposons que la distance de Lyon à Paris est 100 lieues.

RESOLUTION.

Soit la ligne $PL = 100$ P ——— M ——— L, la distance de Paris à Lyon, & $PM = x$ le chemin de celui qui va de Paris à Lyon. Puisque le premier fait 7 tandis que l'autre ne fait que 5, le second fera les $\frac{5}{7}$ du premier, que nous avons appellé x ; ainsi le chemin du second, qui est ML, s'exprimera par les $\frac{5}{7}$ de x ou par $\frac{5x}{7}$. Cela supposé on aura cette équation $PM = PL - ML$ ou (en substituant les valeurs de cette équation) $x = 100 - \frac{5x}{7}$. Donc, par transposition, $x + \frac{5x}{7} = 100$, & multipliant par 7, pour faire évanouir la fraction, on aura $7x + 5x = 700$ ou $12x = 700$; enfin, divisant par 12, l'équa-

tion devient $x = \frac{700}{12} = 58 + \frac{4}{12}$ ou $\frac{1}{3}$; par conséquent $x = 58$ lieues & $\frac{1}{3}$ de lieue; c'est-à-dire que le point, où nos deux voyageurs se rencontreront, sera à 58 lieues & $\frac{1}{3}$ de Paris, & par conséquent à 41 lieues $\frac{2}{3}$ de Lyon. Pour le prouver, il suffit de faire voir que 41 $\frac{2}{3}$ sont les $\frac{5}{7}$ de 58 $\frac{1}{3}$: or $\frac{1}{7}$ de 58 $\frac{1}{3} = 8 \frac{1}{3}$; donc 5 fois $\frac{1}{7}$ ou $\frac{5}{7}$ de 58 $\frac{1}{3} = 5 \times 8 \frac{1}{3} = 40 + \frac{5}{3} = 41 \frac{2}{3}$, ainsi que nous l'avons déterminé.

PROBLEME V.

101. Un pere a 35 ans, & son fils en a 13; on demande dans quel temps le pére aura un âge double de celui du fils ?

RESOLUTION.

J'appelle ce temps x. L'âge du pére sera donc $35 + x$, & celui du fils $13 + x$: mais, par la condition du Problême, à la fin de ce temps l'âge du pére doit être double de celui du fils. Donc

$35 + x = \overline{13 + x} \times 2 = 26 + 2x$. Ainsi, ôtant x de part & d'autre, $35 = 26 + x$; &, transposant 26, on a $35 - 26 = x$ ou $9 = x$. Ce qui signifie que dans 9 ans l'âge du pére sera double de l'âge du fils. Effectivement ajoutez 9 à 35, l'âge du pére sera 44: ajoutez aussi 9 à 13, vous aurez 22 pour l'âge du fils. Or 44 est précisément le double de 22. Donc, &c.

Mais quelque soit l'âge du pére & celui du fils, on résoudra sur le champ le Problême, en se donnant une formule. Supposons donc que l'âge du pére soit $= p$; que celui du fils soit $= f$, & le temps, où l'un aura le double de l'autre, soit

$= x$; on aura, par la condition du Problême,

$p + x = \overline{f + x} \times 2$ ou $p + x = 2f + 2x$. Ôtant x de part & d'autre, l'équation est $p = 2f + x$. Donc (en transposant $2f$) $p - 2f = x$; c'est-à-dire que, pour trouver le temps où l'âge du pére sera double de l'âge du fils, il n'y a toujours qu'à retrancher le double de l'âge du fils de l'âge du pére; le reste de cette soustraction exprimera le temps auquel l'âge du pére sera double de l'âge du fils.

Par éxemple, le pére a 27 ans & son fils 11; de 27 ôtez le double de 11 = 22, le reste 5 fera voir que dans 5 ans le pére sera une fois plus âgé que le fils; car dans 5 ans le fils aura 16 & le pére 32.

102. Une formule, comme $p - 2f = x$, est d'une extrême commodité; elle fait découvrir tout à coup quand la résolution du Problême est possible, & quand elle ne l'est pas : car, si $- 2f$ est plus grand que p, on aura une grandeur négative, c'est-à-dire, qu'il faudroit toujours ajouter quelque chose à l'âge du pére afin qu'il fut double de l'âge du fils; ainsi le Problême seroit impossible, en s'en tenant simplement à la supposition.

Par éxemple, un pére a 30 ans & son fils en a 19; je dis qu'il n'est pas possible que l'un ait jamais le double de l'autre, puisque, suivant la formule $p - 2f = x$, pour avoir la valeur de x, on doit retrancher $2f$, c'est-à-dire, le double de l'âge du fils ou 38 de p ou de 30; ce qui est impossible, 38 étant plus grand que 30.

Vous pouvez juger, par cette petite formule, de l'étendue immense de l'Algébre qui fait découvrir d'un trait de plume, non-seulement une infinité de problêmes, mais qui montre encore les limites de leur possibilité.

PROBLEME VI.

103. La somme de deux grandeurs x, y inconnues étant donnée avec la différence de ces grandeurs, déterminer leur valeur.

RESOLUTION.

Appellons s la somme de ces grandeurs. d leur différence. On aura $x + y = s$; & (suppofant $x > y$) $x - y = d$. Ajoutons la premiere équation à la seconde, c'est-à-dire, le premier membre au premier membre, & le second au second, il en viendra cette unique équation $x + y + x - y = s + d$, de laquelle effaçant $+ y$ & $- y$ qui se détruisent, il reste $x + x$ ou $2x = s + d$. Ainsi $x = \frac{s+d}{2} = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$, cela signifie que la plus grande des deux quantités est égale à la moitié de la somme de ces quantités, plus la moitié de leur différence, qui sont des grandeurs données. La plus petite est donc aussi connue, à cause que la somme est donnée.

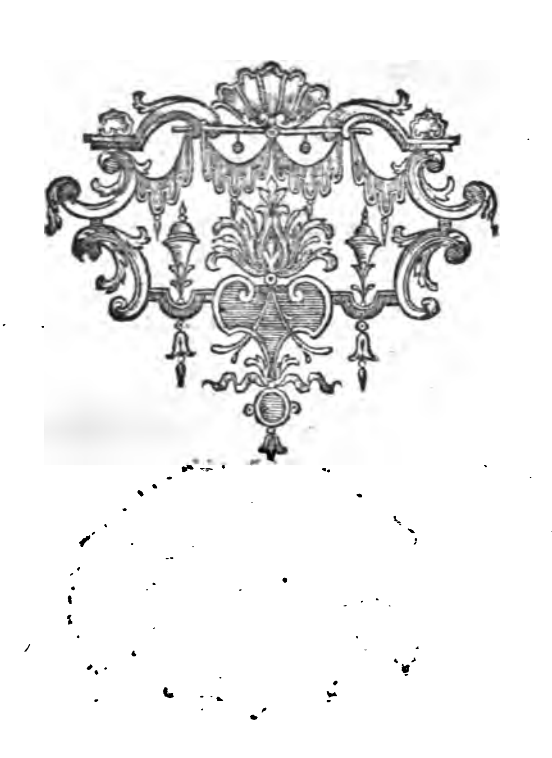
Cependant, si l'on vouloit connoître la plus petite indépendamment de la plus grande, en reprenant les deux équations $x + y = s$ & $x - y = d$, on retrancheroit la seconde de la premiere, c'est-à-dire, le premier membre du premier membre, & le second du second, pour avoir $x + y - x + y = s - d$ ou (en effaçant ce qui se détruit) $y + y = s - d = 2y$. Donc $\frac{s-d}{2} = y$ ou $\frac{s}{2} - \frac{d}{2} = y$, ce qui veut dire que la plus petite de deux grandeurs est égale à la moitié de la somme de ces grandeurs moins la moitié de leur différence.

Soit, par exemple, la somme de deux nombres inconnus = 75, & leur différence = 17. Pour avoir le plus grand de ces deux nombres prenez la moitié de leur somme = $37 \frac{1}{2}$, & la moitié de leur différence = $8 \frac{1}{2}$, ajoutez $37 \frac{1}{2}$ à $8 \frac{1}{2}$: vous aurez 46 pour la valeur du plus grand des deux nombres. Voulez-vous le plus petit ? de $37 \frac{1}{2}$ ôtez $8 \frac{1}{2}$; le reste 29 sera le nombre cherché.

On juge que les deux nombres 46 & 29 sont les véritables nombres cherchés, parce qu'ils satisfont aux deux conditions du problême ; car ajoutez 46 à 29 vous aurez 75, c'est la premiere condition. Otez 29 de 46, la différence est 17, c'est la seconde condition du problême : ainsi les deux nombres trouvés résolvent la question.

On doit faire attention à la résolution de ce problême ; il n'est pas en lui-même fort important ; mais il conduit quelque fois à la résolution de très-beaux problêmes.





INSTITUTIONS



INSTITUTIONS DE GÉOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

De l'objet de la Géométrie. Ses Principes. Sa Méthode.

NOus naissons au milieu d'objets qui tiennent à nous ou auxquels nous tenons par nos sens & par nos besoins. Ces objets ont reçu généralement le nom de *corps*.

Après les couleurs qui nous font distinguer les corps avec une si merveilleuse rapidité, ce qui nous frappe en eux ou même ce qui nous y intéresse le plus, ce sont leurs *dimensions* (a). Ils vont en long,

(a) *Dimensions.* C'est un nom général que l'on a donné aux côtés par lesquels on mesure les corps. Ce mot vient du mot latin *Dimensio* dimension, mesure. Ceux qui enseignent aux enfans doivent leur faire remarquer ces dimensions sur le premier objet qui tombera sous leurs mains, sur une Régle, sur un Livre, sur une Table où elles soient bien distinctement désignées.

En général on ne doit jamais faire une définition aux enfans, sans avoir auparavant bien exposé à leurs yeux la chose que l'on définit. Le nom ne doit aller qu'après l'idée, puisqu'il n'a été établi que pour la réveiller.

ils s'étendent en large, ils s'élévent en-dessus ou s'abbaissent en-dessous.

Ce premier coup d'œil offre naturellement trois directions ou trois sens par lesquels on peut déterminer toute l'étendue d'un corps, *longueur*, *largeur*, *épaisseur* que l'on nomme aussi *hauteur* ou *profondeur* (*a*); mais cette détermination n'auroit jamais lieu, si l'on ne convenoit pas d'une certaine quantité fixe (*b*) à laquelle on doive rapporter les dimensions des corps. Lorsque l'on fait ou que l'on cherche ce rapport, cela s'appelle *mesurer*.

Pour mesurer avec précision, on s'est rendu attentif aux propriétés qui résultoient des dimensions de la matiére, prises séparément ou combinées ensemble. On a remarqué d'abord que la distance entre deux objets seroit connuë, dès que l'on auroit déterminé la longueur comprise entre eux : mais que cette détermination seule ne suffisoit pas lorsque l'on vouloit connoître l'étendue d'un jardin ou d'une plaine; qu'il falloit encore s'assurer de la mesure contenue dans sa largeur : & qu'enfin outre la longueur & la largeur d'une Table il étoit besoin d'en reconnoître l'épaisseur, afin de juger de sa solidité.

Celui qui tenteroit de découvrir les propriétés des corps, sans prendre son objet par parties, sans passer des plus simples aux plus composées, succomberoit bien-tôt à ses recherches.

(*a*) *Epaisseur*, *hauteur*, *profondeur*. Ces trois mots ne sont pas indifférens dans le langage ordinaire : on dit la hauteur d'une piramide, l'épaisseur d'une poutre, la profondeur de la mer.

(*b*) *Si l'on ne convenoit pas d'une certaine quantité fixe*... On fera comprendre tout ce discours aux enfans, en leur montrant une toise, une aune, un pied, &c. On appliquera ces mesures sur une longueur que l'on se proposera de déterminer, & ils compteront assez d'eux-mêmes les toises, les pieds, les pouces, &c. que ces mesures offriront. Les enfans se plaisent beaucoup à ces exercices: ils les regardent plutôt comme un divertissement que comme une étude.

On s'est donc attaché à rechercher d'abord les propriétés de la longueur séparément ; puis celles qui pouvoient résulter de la combinaison d'une longueur avec une autre longueur ou de la longueur avec la largeur, & l'on a fini par compliquer ensemble les trois dimensions des corps la longueur, la largeur, l'épaisseur.

Toutes ces considérations ont produit un grand nombre de vérités, suffisantes même aux besoins de notre corps, besoins si prodigieusement multipliés dans l'état de la société, tandis qu'elles sont l'aliment le plus agréable de l'esprit.

Après cela on a travaillé à disposer ces vérités de maniére que les plus aisées servissent à l'intelligence des plus difficiles ; & c'est cet assemblage & cet ordre de vérités réunies en corps qui forment la science que l'on appelle *Géométrie* (*a*).

La Géométrie est ou *spéculative* ou *pratique*.

La Géométrie spéculative fait connoître les vérités que l'on a découvertes sur les dimensions de la matiére ; elle montre leur ordre & leur mutuelle dépendance.

La Géométrie pratique raméne à notre utilité toutes ces spéculations.

Si les dimensions des corps n'éxistoient pas telles qu'on les suppose en Géométrie, quelqu'admirablement liées que fussent les conséquences avec les suppositions dont on les déduit, l'une & l'autre Géométrie se réduiroit à une pure curiosité de l'esprit, qui se plaît à contempler l'architecture d'un sistême imaginé à plaisir.

Mais puisque tous les ouvrages de la nature & ceux de l'art, qui ont le plus de droit à l'estime des

(*a*) *Que l'on appelle Géométrie.* Définition de cette science. La Géométrie est l'assemblage & l'ordre des vérités réunies en corps que l'on a découvertes en considérant les dimensions de la matiere.

hommes, ne tirent leur excellence & leur solidité que de ces suppositions ; il faut donc qu'elles soient réelles.

1. Pour s'en convaincre, prenons une glace ou un miroir ; nous ne pouvons toucher que sa surface ; son épaisseur est dessous ou derriére : la surface d'un corps n'a donc pas d'épaisseur ou, ce qui revient au même, l'épaisseur n'est pas une propriété de la surface, elle s'étend seulement en long & en large. Transportons notre main aux extrémités de cette surface ; nous pouvons les toucher : parcourons, par exemple, la longueur qui la termine : puisque nous ne touchons que l'extrémité de la surface sans empiéter sur la largeur, il y a donc des dimensions qui n'ont point de largeur : ces dimensions sans largeur ont aussi des extrémités que l'on appelle des *points*, qui sont par conséquent sans aucune dimension : en effet qui pourroit mesurer l'extrémité d'une longueur ?

Les principes de la Géométrie (a) sont donc ce

(a) *Les principes de la Géométrie sont ce qu'il y a de plus incontestable dans la nature.* L'esprit humain a des travers inconcevables, il va jusqu'à nier ce qu'il voit, ce qu'il touche. Parce que l'épaisseur des corps est toujours avec leur surface, que la longueur accompagne toujours la largeur, beaucoup de gens croyent avoir droit de s'élever contre les Géométres qui supposent des surfaces sans épaisseur, des longueurs ou des lignes sans largeur. Sur ce fondement ils publient que les principes de la Géometrie sont faux ; ce qui ne laisse pas de les jetter dans un très-grand embarras, quand ils viennent à considérer que ces suppositions prétendues fausses conduisent nécessairement à des vérités que la nature étale à tous les yeux, & que les Arts supposent dans toutes leurs pratiques.

Mais on est dupe des mots. Quand les Géométres supposent des surfaces sans épaisseur, ils ne veulent pas dire que l'épaisseur n'accompagne pas les surfaces : cela signifie simplement que les surfaces n'ont point d'épaisseur : ce qui est effectivement vrai, puisqu'il est impossible de toucher autre chose dans une surface que sa longueur & sa largeur. Je supplie que l'on accorde un moment d'attention à ces trois questions ; la surface d'une piéce d'eau est-elle bien épaisse ? La distance de Paris à Rome est-elle bien large ? Combien y a-t'il de toises, de pieds, de pouces, &c. dans l'extrémité d'une ligne ?

qu'il y a de plus inconteſtable dans la nature : le ſtupide & l'homme d'eſprit en ſont également frappés. La main qui touche le répéte à l'œil qui les voit.

Après avoir bien établi la certitude des principes de la Géométrie, expoſons la génération & l'enchaînement des vérités qu'ils produiſent avec tant de fécondité.

CHAPITRE SECOND.

Des propriétés de la ligne droite. L'uſage que l'on en fait.

2. NOus allons conſidérer la longueur des corps & leur largeur, comme décrites ſur une ſurface, dont aucunes parties ne ſoient plus élevées ni plus abbaiſſées les unes que les autres ; ſur une ſurface bien polie & bien platte, que les Géométres appellent *un plan.* La ſurface d'un miroir, d'une table de marbre, du papier ſur lequel on écrit, donne une idée aſſez parfaite du plan.

3. On a déja fait remarquer que les extrémités d'une ſurface plane n'avoient que de la longueur ſans aucune largeur (n°. 1.). Si les parties de cette longueur ne s'écartent ni à droite ni à gauche pendant tout ſon cours comme le trait A B (fig. 1.), qu'elles ſoient bien directement les unes à la ſuite des autres ; en un mot qu'on les enfile toutes d'un ſeul coup d'œil, cela s'appelle *une ligne droite* (a).

(a) Ceux qui définiſſent la ligne droite, *le plus court chemin que l'on puiſſe mener entre deux points*, ne conſultent pas aſſez l'origine de nos idées Géométriques : ce qui ſe préſente à nous d'abord en voyant une ligne droite, c'eſt que toutes ſes parties tendent ſi exactement du même côté que l'ame ne ſe ſent point portée à y

4. Une ligne pliée telle que la ligne OBS (fig. 2) s'appelle *une ligne courbe* ou simplement *une courbe*.

Quand elle fait des serpentemens semblables à ceux de la figure OMNST (fig. 3) on la nomme *courbe à inflexion*.

Si une ligne courbe, qui a dirigé son cours d'un certain côté, paroît revenir tout à coup, c'est une *courbe à rebroussement*. Telle est la figure OMT. (fig. 4.)

Celle dont les parties se roulent les unes sur les autres, en s'éloignant toujours de leur centre ou de leur point de partance O, est appellée *spirale* & quelque fois *volute* (*a*) comme la figure 5.

Nous ne faisons mention de toutes ces courbes, qui sont l'objet de la plus sublime Géométrie, que pour faire remarquer que la nature & l'art les offrent de tous côtés ; elles se montrent dans les eaux courantes forcées de se détourner de leurs cours. Les contours gracieux que l'on donne aux meubles, qui servent à la décoration de nos appartemens, ne sont le plus souvent que *des courbes à inflexion*. La spirale ou la volute se fait voir ordinairement aux chapitaux des pilastres & des colomnes, qui contribuent si bien à la magnificence des Palais & des Temples (*b*).

admettre la moindre multiplicité : la propriété que la ligne droite a d'être le plus court chemin entre deux points est une conséquence, & non pas le premier sentiment que l'on a de la ligne droite.

(*a*) Ce n'est pas qu'en Géométrie une spirale & une volute soient une même courbe ; mais comme ces deux courbes présentent aux yeux la même apparence, on peut les désigner par le même mot.

(*b*) *Qui contribuent si bien*, &c. On fera remarquer tout cela aux enfans, afin que par la suite ces mots singuliers ne leur en imposent point. Nous avons observé bien des fois qu'un mot, qui n'est pas d'un usage fort ordinaire aux enfans ni aux jeunes gens, leur paroît toujours signifier des choses fort au-dessus de leur portée : cela leur cause une sorte d'émotion, qui les fait entrer en soupçon de leurs forces. On obviera à cet inconvénient, en les familiarisant de bonne heure aux idées que ces mots représentent.

5. Revenons à la ligne droite (fig. 1.). Tout ce que l'on y remarque c'est qu'elle s'étend en long, qu'elle a deux extrémités A, B que l'on appelle des *points* : & comme (nº. 3.) pendant tout son cours aucune de ses parties ne s'écarte ni à droite ni à gauche, qu'elles suivent constamment la même direction; il est bien clair que la ligne droite A B marque le plus court chemin qu'il y a du point A au point B; toute autre telle que A S B sera nécessairement plus longue (fig. 6) : ainsi deux points marqués sur un plan déterminent une ligne droite, puisqu'il ne s'offre qu'une direction unique à celui qui regarde de A en B.

PROBLEME I.

6. Décrire ou tracer une ligne droite entre les deux points A, B.

RESOLUTION.

Cette pratique se peut éxécuter sur le papier ou sur le terrein (a).

Premiérement sur le papier. On appliquera la longueur d'une *régle* sur les deux points A, B, & l'on tirera la ligne A B du point A au point B avec une *plume* ou un *crayon* (b).

REMARQUE.

L'exécution de cette pratique dépend de la justesse de la régle. On s'assure qu'une régle est juste en appliquant sur le point A la partie de la régle

(a) *Sur le terrein*, c'est-à-dire, sur un champ, en pleine campagne, ou ce qui est plus commode, sur le pavé d'un appartement.

(b) Régle, *plume*, *crayon*, je ne décris point tous ces instrumens ; ils sont trop simples & trop communs.

qui étoit d'abord vers B, & sur B la partie que l'on avoit posée sur A : l'on conduira, comme ci devant, la pointe d'un crayon le long de la régle : si le second trait se confond parfaitement avec le premier, on aura une assez bonne preuve de la justesse de la régle.

Secondement sur le terrein. Quand la distance ne sera pas trop grande, on étendra un cordeau du point A au point B, que l'on appelle alors *points de station* (*a*). Le long du cordeau on fera un petit sillon (*b*) qui marquera la ligne droite A B (fig. 7.).

Si la distance est trop considérable, on opérera comme on va voir au problême deuxiéme.

Quand on travaille sur des *bois de construction* (*c*), comme font les Charpentiers, on trempe le cordeau dans une teinte noire, & après l'avoir bien tendu sur les extrémités de la ligne que l'on veut y tracer, en tenant ferme d'une main, on pince de l'autre le cordeau qu'on lâche tout à coup : la violence de son ressort fait détacher la couleur qui trace sur la piéce de bois la ligne droite, le long de laquelle on doit conduire la scie ou tout autre instrument propre à donner au bois la forme que l'on se propose. Il est nécessaire quelquefois de se conduire pendant la nuit sur une ligne droite, qu'il seroit fort dangereux de tracer pendant le jour, par exemple, lorsqu'un Ingénieur (*d*) veut conduire une tran-

(*a*) *Points de station.* Ce sont des points sur le terrein où l'on fait ses opérations.

(*b*) Sillon. C'est une raye ou une petite ouverture en terre qui s'étend en longueur.

(*c*) *Bois de construction* C'est un bois propre à bâtir des édifices, à faire des machines. Il est nécessaire que ce bois soit plus droit & plus uni que celui dont on se sert pour se chauffer.

(*d*) Un Ingénieur est un homme qui conduit ou qui fait éxécuter les travaux militaires qui supposent quelqu'intelligence.

chée (*a*) vers une Ville assiégée qui fait feu de toutes ses défenses. Pour en venir à bout, on remarque bien éxactement pendant le jour la direction qu'il faut donner à la tranchée, on se fait des points remarquables auxquels on pose pendant la nuit un feu que l'on cache à l'ennemi, & l'on dresse sur ce feu le travail des Soldats.

PROBLEME II.

7. Prolonger une ligne droite autant qu'il en est besoin.

RESOLUTION.

1°. Sur le papier. On se servira de la régle, comme on a fait au problême premier, ou bien on tendra un fil sur la ligne que l'on a déja, jusques à la distance où l'on se propose de la prolonger.

2°. Sur le terrein. A chaque extrémité de la ligne droite A B (fig. 8.) que l'on veut prolonger, on plantera un *piquet* (*c*) bien à plomb : au-delà de ces deux piquets on en plantera un troisiéme C qui soit bien dans l'alignement des deux premiers A, B : ce dont on jugera lorsque l'œil regardant de A en B ne verra plus le piquet C; car alors les trois piquets seront dans la même direction (n°. 3.). On pourra répéter cette opération autant qu'on le jugera à propos.

(*b*) Une tranchée n'est autre chose qu'un fosse que l'on creuse, afin de s'approcher, à couvert du feu de l'ennemi, d'une Ville que l'on veut prendre ou d'un poste dont on veut s'emparer.

(*c*) *Piquet* ou *jallon*. C'est un bâton long de 4, 5 ou 6 pieds, suivant la hauteur de celui qui opére, armé d'une pointe de fer par une de ses extrémités que l'on fiche en terre. On fait ensorte que ce bâton ne panche d'aucun côté par le moyen d'un plomb suspendu à un fil. On aura soin d'être fourni de piquets accompagnés de leur plomb; les enfans ne demanderont pas mieux que de les planter, & d'imiter les Maîtres qui leur montreront comment on doit les alligner.

On tracera par ce même moyen une ligne droite fort longue ; c'est-à-dire, que l'on plantera d'abord un piquet à chaque extrémité de cette ligne, & entre ces deux piquets on en plantera d'autres qui soient exactement dans l'alignement des deux premiers.

REMARQUE.

Si l'on veut faire cette opération avec exactitude, il ne faut pas que l'œil soit trop près du piquet où l'on fait l'observation : l'œil en seroit trop couvert ; il ne pourroit pas juger avec certitude de la situation des autres piquets.

Démonstration de toutes ces pratiques.

Elle est fondée sur l'idée de la ligne droite (n°. 3.) dont toutes les parties doivent être enfilées d'un seul coup d'œil : le cordeau tendu produit le même effet ; car la tension met toutes ses parties dans une même ligne droite, ainsi que l'expérience le fait voir.

Comme c'est par la ligne droite que l'on détermine la distance des objets, & l'étendue de toutes les dimensions d'un corps ou de sa surface ; il faut voir comment on la mesure sur le terrein ; car sur le papier il n'y a aucune difficulté.

PROBLEME III.

8. Mesurer une ligne droite A B sur le terrein (fig. 9.).

RESOLUTION.

Après avoir tracé cette ligne avec des piquets,

si elle n'est pas plus longue que celles qui forment les allées d'un jardin ordinaire ; on étendra dessus un cordeau d'une mesure connue qui contiendra, par exemple, 4 toises, dont il y en aura une divisée en pieds, & même un des pieds divisé en pouces : & par ce moyen la mesure de la ligne A B sera facilement connue.

Mais quand la ligne A B aura une longueur considérable, deux hommes seront employés à cette opération, & prenant chacun une extrémité du cordeau ou de la chaîne, celui qui doit marcher devant l'autre de A vers B se chargera d'un nombre de piquets qu'il jugera à peu près convenable : ces deux hommes tendront la chaîne dans la direction de la ligne A B depuis A jusqu'en C, ou celui qui va devant plantera un piquet ; après cette premiére opération ils marcheront tous deux en avant sur la ligne A B, & le second étant arrivé au point C, ils tendront la chaîne depuis C jusqu'en D où le premier plantera un second piquet ; celui qui marche derriére enlevera le piquet C ; & continuant leur marche dans la direction de la ligne A B, après chaque coup de cordeau (*a*), l'un plantera des piquets & l'autre les enlévera, ainsi que nous l'avons décrit.

Quand ils seront arrivés à l'extrémité de la ligne A B, on comptera les piquets, dont le nombre indiquera la quantité des coups de cordeau, & par conséquent les toises, les pieds & les pouces contenus dans la longueur A B.

(*a*) On dit que l'on donne *un coup de cordeau*, quand on étend la chaîne ou la corde d'un piquet à l'autre.

CHAPITRE TROISIÉME.

De la ligne droite combinée avec une autre ligne droite. Origine & génération de la ligne circulaire. Vérités qui en résultent. Avantages pour tous les Arts.

AXIOME (a).

Deux lignes droites, mises l'une sur l'autre, s'ajusteront parfaitement, ou ne feront qu'une seule & même ligne.

9. La considération d'une ligne droite toute seule ne méne pas loin : c'est la combinaison d'une ou de plusieurs lignes avec d'autres qui multiplie les objets, en même temps qu'elle ouvre une plus grande carriére aux spéculations (b).

Suivant la sage méthode de la Géométrie, qui ne s'empare que pied à pied du vaste champ des vérités, combinons seulement une ligne droite avec une autre ligne droite, & voyons ce qu'il en arrivera.

La ligne AB, située sur le même plan que la ligne CD, la rencontre (fig. 10.) ou est seulement déterminée à la rencontrer (fig. 11.) ou enfin n'a aucune tendance vers elle (fig. 12.).

Supposons qu'elle la rencontre (fig. 10.) au point D. Outre les deux lignes AB, CD, on voit naître au point D deux encognures, ou plutôt deux

(a) Un *Axiome* est une vérité si claire que, pour être comprise, elle n'a besoin que d'être proposée.

(b) *Spéculation*. C'est l'action d'un homme qui médite attentivement sur un objet. Ce mot vient du latin *speculatio* observation.

coins, en prenant le dedans ou le creux de la figure ; l'un ou l'autre coin s'appelle un *angle* (*a*), le point D de rencontre en est le *sommet*, A D, C D sont les *côtés* de l'angle *r*, & B D, C D le sont de l'angle *s* (*b*).

(*a*) Nous désignerons un *angle* par une petite lettre mise en dedans vers sa pointe, comme on le voit, fig. 10, ou bien par trois lettres, dont celle du milieu désignera le sommet de l'angle. Ainsi, pour désigner l'angle r, on diroit l'angle A D C ou C D A à cause que l'angle se trouve au point D : & l'on ne pourroit pas dire l'angle D C A ; car il n'y a point d'angle au point C.

(*b*) Lorsque je me suis mis à composer ces Institutions, j'ai crû devoir me retrancher absolument la lecture des Auteurs qui ont travaillé sur la même matière. Nous sommes si naturellement portés à l'imitation que l'on prend, sans y penser, le ton, la manière, le stile, les idées mêmes des Ecrivains que l'on étudie. Rien au monde ne rend le génie aussi paresseux qu'une grande lecture. On s'accoutume si fort à penser par autrui que l'on devient incapable de produire rien par soi-même.

C'est pourquoi cet ouvrage étoit fini, quand la curiosité m'a pris de voir les Elémens de M. Arnauld (seconde Edit. M. DC. LXXXIII) On m'a dit tant de fois qu'il avoit travaillé sur un plan nouveau, que je n'ai pû résister à l'envie d'examiner en quoi nous nous sommes rencontrés.

Mon plan général est totalement différent du sien. Ses propositions ne sont point engendrées les unes des autres. On lui est redevable, à la vérité, d'avoir cherché à faire mieux que ses prédécesseurs : il y a réussi en partie ; mais il me paroît que cet Auteur étoit un peu trop dominé par l'envie de détruire. Il a attaqué les Anciens sur des principes dont les fondemens me paroissent très-solidement établis. J'ai fait quelques notes à cette occasion. Je les ai placées aux endroits que mon sujet m'a indiqués. On verra si M. Arnaud ne s'est pas laissé aller au-delà des bornes d'une juste réforme.

Par exemple, il prétend (liv. 8. art 1.) qu'*après avoir parlé des lignes, s'est suivre l'ordre de la nature que de passer aux angles qui sont plus composés que les lignes tenant quelque chose des surfaces.*

Me sera-t'il permis de dire que c'est-là incidenter sur les mots. Il est vrai qu'une ligne toute seule est moins composée qu'un angle, qui résulte nécessairement de l'intersection de deux lignes : mais la combinaison de plusieurs lignes, leur position les unes à l'égard des autres offrent-elles quelque chose de moins composé qu'un angle : c'est cependant cette combinaison de lignes, dont M. Arnaud recherche les propriétés dès l'entrée de sa Géométrie, immédiatement après avoir donné la définition de la ligne droite ; & par conséquent cet Auteur tombe dans l'inconvénient qu'il veut éviter.

C'est toujours par rapport à notre intelligence que l'on doit juger de la composition des choses. Si mon ame apperçoit un angle aussi faci-

10. Comme la ligne CD panche ou s'incline beaucoup plus du côté de A que du côté de B, l'angle *r* paroît aussi plus serré, plus étroit, moins ouvert que l'angle *s*; dans ce cas l'angle *r* est un *angle aigu*, & *s* est un *angle obtus*.

Mais il peut arriver que CD rencontrant AB ne s'incline d'aucun côté (fig. 13.); alors l'angle *r* est un *angle droit* aussi bien que l'angle *s*, & l'un & l'autre sont égaux, puisque leur inégalité ne pourroit procéder que de la ligne CD, qui s'inclineroit plus d'un côté que de l'autre, ce que l'on ne suppose pas.

11. Non-seulement l'angle droit $r = s$; mais en général tous les angles droits sont égaux (*a*); par

lement qu'une ligne, & plus facilement que la combinaison de plusieurs lignes, je n'en rejetterai pas la considération, en cas que j'y sois entraîné par mon sujet, sur le fondement qu'un angle est composé de plusieurs lignes, & que la ligne n'admet point de composition. Or la perception d'un angle ne m'est pas plus pénible que celle d'une ligne. L'angle est le premier effet de deux lignes qui se compliquent.

On ne doit donc pas se dispenser de considérer les angles, quand on considère, comme a fait M. Arnauld & après lui le P. Lami, la position des lignes les unes à l'égard des autres; car on néglige precisément le premier effet de cette position, & l'on manque conséquemment la génération immédiate des vérités qui en naissent. C'est à cette considération que nous devons nous-mêmes la chaîne non interrompue de toutes les Propositions de cette Géométrie.

(*a*) On peut faire toucher cette vérité aux yeux des enfans. Il n'y a qu'à prendre deux *équerres* (*b*), dont les côtés de l'une soient plus longs que les côtés de l'autre, afin que les enfans ne s'imaginent pas que l'égalité des côtés contribue à celle des angles; on ajustera les côtés de l'équerre la plus courte sur les côtés de la plus longue, ce qui produira une correspondance parfaite.

D'ailleurs il y a des meubles que l'on nomme *encognures*. On en voit dans beaucoup d'appartemens; rien n'est plus propre à faire comprendre aux enfans que tous les angles droits sont égaux. Comme ces encognures ont deux faces qui forment un angle droit, elles s'ajustent avec une précision parfaite à tous les coins indifféremment. Les Architectes, ayant envisagé que l'angle droit étoit de tous les angles le plus commode & le plus solide, observent généralement dans la pratique que les murailles d'un appartement se rencontrent à angles droits : c'est pourquoi les Artisans n'ont point besoin de prendre la mesure du coin d'un appartement, afin d'y placer une encognure.

(*b*) *L'équerre* est un instrument composé de deux branches qui forment un angle droit.

exemple, l'angle droit *a* de la figure 14. est égale à l'angle *r* de la figure 13; car portant P M sur D A, le point P sur le point D, il sera facile de coucher la droite P M sur la droite D A: ces deux lignes, ainsi posées, ne feront qu'une seule & même droite, sur laquelle C D, O P sont supposées ne point pancher: O P se confondra donc avec D C. Ces deux lignes ne pourroient se dégager l'une de l'autre qu'en tant que l'une des deux s'écarteroit à droite ou à gauche: ce qui est contraire à la supposition.

12. La ligne C D (fig. 10.) qui fait les angles *r*, *s* inégaux, c'est-à-dire, qui s'incline plus du côté de A que du côté de B, est dite *oblique* par rapport à la ligne A B; mais lorsqu'elle ne panche pas plus d'un côté que de l'autre, elle est dite *perpendiculaire* à la ligne A B (fig. 15.).

Ainsi au même point D d'une ligne droite A B, il n'est pas possible d'élever plus d'une perpendiculaire C D. On voit bien que toute autre ligne, comme D S, pancheroit plus d'un côté que de l'autre.

13. Mais comment s'assurer qu'une ligne est perpendiculaire ou oblique? Qu'est-ce qui nous dira bien précisément qu'un angle est égal à un autre, qu'il est plus grand ou qu'il est plus petit; c'est-là ce qui nous intéresse: la comparaison est une source inépuisable de vérités, & même le seul moyen de déterminer l'étendue d'une dimension (*a*).

(*a*) *La comparaison .... est le seul moyen de déterminer l'étendue d'une dimension.* Il faut accoutumer de bonne heure les enfans à remarquer que nous ne connoissons les *grandeurs* ou *les quantités* que par comparaison: ce qu'il est très-facile de leur faire entendre, en leur proposant des questions sur la grandeur ou la petitesse des premiers objets que l'on aura sous les mains ou sous les yeux. Ils ne manqueront pas de répondre qu'une table est trop haute, puisqu'ils ne sçauroient y atteindre; que le grain que l'on donne aux oiseaux est fort petit, qu'ils en mettroient plus de mille dans une main: ainsi leur corps ou leur main sont les termes de la comparaison: c'est-là-dessus qu'ils mesurent l'étendue des autres corps.

Voyons comment l'angle ADC (fig. 16.) peut devenir plus grand. Supposons une charniére au point D, & faisons tourner tout d'une piéce le côté CD autour du point D, il deviendra successivement DO, DT, & l'angle ADC sera ADO ou ADT.

L'angle ADC croît donc par le mouvement d'un ou de ses deux côtés autour du point D, son aggrandissement doit donc être mesuré par une ligne tournante, c'est-à-dire, par une ligne qui suive tous les mouvemens du côté CD.

Mais tandis que le tournoyement du côté CD fait croître l'angle ADC, son extrémité C décrit la ligne ponctuée COT qui répond exactement à chaque mouvement du côté CD : ainsi puisque la ligne COT répond si juste à la grandeur des angles, on a dû la prendre pour leur mesure.

14. Il est évident que CD (fig. 17.) peut faire sa révolution tout autour du point D : que son extrémité C peut courir la ligne tournante CCC, &c. jusqu'à ce qu'étant venue en B, elle soit dans la même direction que la ligne AD, où elle cessera par conséquent de faire aucun angle. Que la ligne CD, arrivée en B, peut descendre par la ligne OOO, &c. pour remonter en A ; en un mot tracer en-dessous de AB la même ligne qu'elle a décrite en-dessus.

On appelle *cercle* l'espace renfermé en-dedans de la ligne CCCOOO nommée *circonférence*, parce que toutes ses parties sont disposées autour d'un point D, auquel on a donné le nom de *centre*.

L'angle est donc l'origine du cercle & de sa circonférence. On ne sçauroit augmenter ni diminuer un angle par un mouvement continu, sans tracer en même temps une portion de cercle & de circonférence

conférence ; c'est pourquoi la circonférence du cercle, destinée à évaluer les angles, n'est pas une mesure arbitraire ou prise à plaisir : la nature l'a attachée à la génération des angles, & elle en a fait présent à celui qui a eu le mérite de s'en appercevoir (*a*).

Dans un cercle (fig. 17.) la distance DC du centre D à la circonférence CCC est un *rayon*.

15. Puisque c'est la même ligne DC qui trace la circonférence, tous les DC, c'est-à-dire, tous les rayons du cercle sont égaux.

En prolongeant CD jusqu'au point opposé O de la circonférence, on aura une ligne CDO qui passe par le centre, & qui aboutit à deux points de la circonférence ; elle s'appelle un *diamétre*. Tous les diamétres d'un cercle contiennent deux rayons ; ils sont par conséquent égaux entre eux.

16. Toute ligne (fig. 19.) comme AB terminée à deux points A, B de la circonférence, sans passer par le centre D, prend le nom de *corde* ou *sous-tendante* ; parce qu'elle représente une corde tendue sous la portion de circonférence AOB que l'on appelle un *arc*. Il est clair que le diamétre CDS est la plus grande de toutes les cordes.

(*a*.) Ceux qui enseigneront la Géométrie aux enfans saisiront une occasion aussi simple de leur donner l'esprit d'observation. On prendra deux régles égales qui se croisent par le milieu O, où elles sont attachées par le moyen d'un petit axe sur lequel elles peuvent tourner (fig. 18.). On fixera l'une de ces régles sur une table, & l'on fera tourner l'autre, à l'extrémité de laquelle il seroit bon d'avoir ajusté une pointe posée verticalement, c'est-à-dire, de haut en bas.

Il vaut mieux commencer par poser la régle mobile tout le long de la régle fixe. Dans ce cas il n'y aura point d'angle : mais dès que l'on fera mouvoir la régle mobile, on fera appercevoir aux enfans l'encognure ou l'angle qui se forme au centre, en même temps que la pointe trace une portion de circonférence, dont elle laisse une impression sur la table. Après cela on leur fera voir que le compas produit le même effet.

La circonférence du cercle étant la mesure naturelle des angles (n°. 13.) nous pouvons nous en servir pour les comparer (*a*).

PROBLEME IV.

17. On veut sçavoir lequel des deux angles r, s est le plus grand (fig. 20. & 21.).

RESOLUTION.

On prendra un compas dont on ouvrira les jambes. On posera une de ses pointes sur le sommet A de l'angle *r* (fig. 20.) : autour du point A on fera tourner l'autre branche, afin que son extrémité décrive l'arc B M D entre les côtés A B, A D de l'angle *r*. On fera la même opération sur l'angle *s* (fig. 21.) avec la même ouverture de compas, qui donnera l'arc O N T. On prendra cet arc ou plutôt sa corde (*b*) que l'on portera sur l'arc B M D depuis B jusqu'en P, & l'on verra par-là que l'angle *r* est plus grand que l'angle *s*, puisqu'il a un arc ou une mesure plus grande.

On se sert du même artifice pour faire un angle égal à un angle proposé.

(*a*) La circonférence du cercle étant uniforme, les arcs croissent comme les angles : leur mesure est fondée sur cette correspondance qui est si parfaite.

(*b*) On doit faire observer aux enfans que le compas ne donne point la longueur des arcs, mais simplement la longueur de leur corde ou de leur soutendante ; qu'en ouvrant le compas depuis T jusqu'en O, on n'a pas la longueur de l'arc T N O ; on a celle de sa corde T O : c'est pourquoi on ne juge, à proprement parler, que l'arc B M D est plus grand que O N T qu'à cause que la corde B D est plus grande que la corde O T : parce que sur des circonférences décrites du même rayon, une plus grande corde soutient nécessairement un plus grand arc ; cela vient de l'uniformité de la circonférence. On doit prendre garde à cette observation ; car les commençans croyent qu'avec le compas ils prennent réellement des arcs.

PROBLEME V.

18. Au point A de la ligne AB faire un angle égal à l'angle donné COD (fig. 22. & 23.).

RESOLUTION.

Du point O & d'une ouverture de compas à volonté décrivez l'arc CD entre les côtés de l'angle COD (fig. 23.). Ensuite avec la même ouverture de compas & du point A décrivez l'arc indéfini BMS (fig. 22.) sur lequel vous porterez CD depuis B jusqu'en M, ou tirant la ligne AM, l'angle BAM sera égal à l'angle COD; puisque la mesure de l'un a été faite égale à la mesure de l'autre.

19. Que les côtés d'un angle soient fort courts ou très-allongés, cela ne fait rien à sa grandeur; elle dépend uniquement de l'inclinaison plus ou moins grande de ses côtés, l'un sur l'autre.

Allongez le côté BC de l'angle *a* (*fig.* 24.) jusqu'en S, & son autre côté BD jusqu'en R. Comme vous n'avez pas fait tourner le côté BC sur la charnière B, l'ouverture de l'angle *a* est restée telle qu'elle étoit avant le prolongement de ses côtés. A la même distance du point B vous trouverez toujours le même arc CD pour sa mesure.

Cela paroîtra encore plus sensible en comparant l'angle *a* avec l'angle *r* (fig. 25. & 26.). quoique les côtés OM, OP de l'angle *r* (fig. 26.) soient beaucoup plus longs que les côtés BC, BD de l'angle *a* (fig. 25.) c'est néanmoins une chose qui saute aux yeux que l'angle *a* est plus grand que l'angle *r*. C'est pourquoi si d'une même ouverture de compas on décrit les arcs CD, XY, l'arc CD est beaucoup plus étendu que l'arc XY de l'angle *r*, dont les côtés sont si longs.

10. Comme il ne suffit pas de sçavoir en général qu'un angle est égal à un autre, qu'il est plus grand ou plus petit; mais qu'il est besoin d'en déterminer la grandeur ou l'excès, afin que l'on puisse se le représenter même sans figure, on est convenu de diviser la circonférence d'un cercle en 360 parties appellées *degrés*; ensorte qu'un degré est toujours la trois cens soixantiéme partie d'une circonférence grande ou petite.

Ainsi l'on fait entendre qu'un angle a une certaine grandeur, en déterminant le nombre des degrés compris entre ses côtés. On dira, par éxemple, que l'angle *a* est de 29 degrés (fig. 27.), soit que l'on prenne sa mesure avec l'arc B C ou avec l'arc O S > B C: parce que O S contient 29 degrés de sa circonférence de même que B C en contient 29 de la sienne. Cela vient de ce que la grandeur d'un angle ne dépend point de la longueur de ses côtés (n°. 19.).

Cependant, si l'on comparoit deux angles, il seroit à la vérité très-libre de les mesurer avec quelle circonférence l'on voudroit; mais cette circonférence une fois déterminée pour un angle doit servir de mesure à l'autre; parce que, quand on demande la différence de deux angles, on veut dire la différence de leur ouverture à la même distance du sommet.

Quand on mesure un angle, il arrive assez souvent qu'il ne contient pas un nombre juste de degrés, qu'il en contient, par éxemple, 40 & quelque chose. Afin de pouvoir désigner cet excès, on est encore convenu de diviser chaque degré en 60 parties appellées *minutes*. On dira donc que l'angle O (fig. 28.) est de 40 degrés 30 minutes, ce que l'on a coutume d'exprimer ainsi $40^{\circ}.30'$.

L'expérience apprend que la division de la cir-

conférence en degrés & en minutes n'est pas suffisante ; c'est pourquoi on a divisé la minute en 60 parties appellées *secondes*, & même la seconde en 60 parties nommées *tierces*, *&c.* l'on a continué cette division, tant que le besoin s'est fait sentir. Cette expression $15^{\circ}.\ 18^{\prime}.\ 12^{\prime\prime}.\ 3^{\prime\prime\prime}.$ signifie 15 degrés, 18 minutes, 12 secondes, 3 tierces.

21. La division de la circonférence du cercle en degrés, en minutes, &c. a donné naissance à deux instrumens très-simples & fort commodes pour prendre la valeur des angles sur le papier ou sur le terrein. Celui qui sert à déterminer la valeur des angles sur le papier se nomme *rapporteur*, voyez la figure 29, c'est un demi cercle dont la circonférence est divisée en 180 degrés moitié de 360. Cet instrument montre sur son bord appellé *limbe* des chiffres qui désignent le nombre des degrés que contient chaque division.

PROBLEME VI.

22. Vous voulez sçavoir de combien de degrés est l'angle *a* (fig. 30.) ?

RESOLUTION.

Posez le centre C du rapporteur sur le sommet C de l'angle *a*. Que le rayon C B de l'instrument soit couché bien exactement sur le côté C N, & remarquez sur le limbe du rapporteur à quel degré l'autre côté C M de l'angle *a* coupe la circonférence du rapporteur ; si vous y trouvez 45, l'angle *a* est un angle de 45 degrés.

23. L'instrument avec lequel on prend la valeur des angles sur le terrein s'appelle *Graphométre* (*a*).

(*a*) *Graphométre*, c'est un mot grec qui signifie description de

ou *Astrolabe* ; il ne différe du rapporteur qu'en ce qu'il porte à son centre une régle mobile ou *alidade* O S (fig. 31.). Aussi longue que le diamétre de l'instrument A C B. à chaque extrémité de l'alidade & du diamétre est une petite piéce verticale , c'est-à-dire , qui s'éléve perpendiculairement de bas en haut , à peu près quarrée , fendue de haut en bas afin que l'on puisse observer les objets , on l'appelle une *pinule* ; O N , M S sont des pinules (*a*).

Le graphométre est quelquefois accompagné d'une *lunette*, pour discerner les objets éloignés avec plus de distinction. On y ajoute même une *boussole* ; c'est une aiguille aimantée, qui a la propriété de se diriger constamment ou très à peu près vers le même point du Ciel, de même qu'une pierre ou tout corps pesant, jetté en l'air, affecte de tomber par une ligne verticale. Cette boussole sert à déterminer la position des objets par rapport à l'Orient ou au lever du Soleil , ce qui s'appelle les *orienter*.

Quand on veut se servir de cet instrument, pour déterminer la valeur des angles, on le dispose sur un support à trois branches (fig. 31.) d'une hauteur proportionnée à celle de l'observateur : on lui fait prendre la situation dont on a besoin par le moyen d'un *genou* (*b*), qui permet au graphométre un mouvement en tout sens.

mesures. Si l'on vouloit donner un nom françois à cet instrument, il faudroit l'appeller un *mesurangle*.

(*a*) Nous ne donnons pas ici une description finie du Rapporteur ni du Graphométre. Ceux qui enseignent aux enfans doivent la faire sur l'instrument même. Il leur sera facile de suppléer ce qui manque à ce que nous venons d'en dire. Notre dessein étant de n'expliquer les choses qu'à mesure que la nécessité les améne.

(*b*) *Genou*, c'est une piéce du Graphométre que l'on met au haut du pied qui soutient cet instrument pour faire les observations. Elle est faite ordinairement d'un globe de cuivre enfermé dans un demi-globe creux où elle est mobile en tout sens.

PROBLEME VII.

24. Un œil placé en C qui regarderoit l'arbre RL verroit sa hauteur sous l'angle RCL, que l'on veut déterminer (fig. 31.).

RESOLUTION.

Disposez le graphométre de maniére que son centre réponde bien juste au point C où l'on fait l'observation. Allignez le diamétre AB au pied de l'arbre L, & fixez l'instrument dans cette position. Faites ensuite tourner l'alidade OS sur son centre, jusqu'à ce qu'elle soit bien éxactement dans la direction du point C au sommet R du même arbre : le nombre des degrés sur le limbe de l'instrument, compris entre l'extrémité B du diamétre & l'extrémité O de l'alidade, marquera la valeur de l'angle RCL, sous lequel on voit la distance RL (*a*).

(*a*) Nous ne sçaurions trop le répéter : avec les enfans la pratique doit être la compagne inséparable de la Théorie. On leur fera la description du graphométre ; l'instrument devant les yeux : on ira au jardin, ou même, sans sortir de l'appartement, on leur fera voir comment on prend l'angle sous lequel deux objets paroissent distants l'un de l'autre.

Cet appareil, qui frappe beaucoup les sens, & qui donne lieu aux enfans de s'agiter, a pour eux un attrait inconcevable. Les vérités que le plaisir trace dans la mémoire ne s'effacent presque jamais.

D'ailleurs, comme c'est la pratique des vertus qui fait l'honnête homme & non leur simple connoissance, c'est aussi la pratique des vérités reconnuës qui rendent l'esprit ferme sur ses principes.

Nous sera-t'il permis de hasarder une idée ? La Théorie des Sciences, à la prendre dans son origine, seroit-elle autre chose qu'une pratique réfléchie ? Sur ce pied notre méthode de faire toucher une vérité aux yeux ou de la faire entrer par tous les sens, pénétreroit de lumiére jusqu'aux stupides ou à ces végétans, qui ne sentent, pour ainsi dire, que leur propre éxistence.

REMARQUE.

25. On pouvoit diviser la circonférence du cercle en un nombre de degrés bien différent de 360. Il paroît que l'on ne s'est arrêté à ce nombre qu'après avoir reconnu qu'il étoit très-commode pour le calcul; parce qu'il est susceptible d'un très-grand nombre de divisions, sans aucun reste, comme l'on peut voir par la Table que l'on a devant les yeux.

Table, à deux colonnes, où l'on voit tous les nombres, qui divisent exactement le nombre 360.

1	360
2	180
3	120
4	90
5	72
6	60
8	45
9	40
10	36
12	30
15	24
18	20

Nous avons déja observé que l'angle droit est formé par la rencontre d'une ligne perpendiculaire

à une autre. Puis donc que la circonférence du cercle est la mesure naturelle des angles ; elle doit nous fournir le moyen d'avoir des perpendiculaires.

PROBLEME VIII.

26. On propose d'élever une perpendiculaire sur la ligne A B au point C (fig. 32.).

RESOLUTION.

Comme deux points déterminent une ligne droite ; & que l'on a déja le point C ; il est clair que le problême se réduit à trouver un point au-dessus de la ligne A B qui ne panche pas plus du côté de A que du côté de B.

1°. Sur le papier. A droite & à gauche du point C prenez avec le compas deux points, A, B également éloignés du point C : ces deux distances étant déterminées, vous ouvrirez un peu plus le compas ; vous poserez ensuite une de ses pointes sur le point A, & vous tracerez avec l'autre la portion de circonférence ou l'arc O S : vous ferez une semblable opération au point B avec la même ouverture de compas, pour avoir l'arc M N qui coupera O S au point I : de ce point tirez avec la régle une ligne jusqu'au point C, elle sera la perpendiculaire que l'on demande.

DEMONSTRATION.

Le point I d'intersection (*a*) des deux arcs ne panche pas plus du côté de A que du côté de B,

(*a*) *Point d'intersection.* C'est le point où deux lignes s'entrecoupent : ce mot vient du latin *intersecare s'entrecouper.*

puisque la distance de ces points au point I est la même ouverture du compas (par la construction (*a*)); le point C de la ligne I C est aussi (par la construction) à égale distance de A & de B : ainsi toute la ligne I C ne panche d'aucun côté ; elle est donc perpendiculaire.

PROBLEME IX.

27. Le point C, d'où l'on veut avoir une perpendiculaire sur A B, peut être donné hors de la ligne A B. Comment s'y prendre pour y parvenir (fig. 33.)?

RESOLUTION.

Posez une des pointes du compas sur le point C : donnez au compas une ouverture telle qu'en décrivant l'arc *orst*, cet arc coupe la ligne A B aux points *r*, *s* (ce que la premiére tentative apprendra). De ces points *r*, *s*, & d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de la ligne *rs* (*b*), décrivez les deux arcs *gh*, *mn* qui s'entrecoupent au point P en-dessus ou en-dessous de la ligne A B ; par les points C, P tirez une ligne C D jusqu'à la rencontre de A B, elle lui sera perpendiculaire. Ce qui est assez évident par le Problême précédent, puisque cette ligne a deux points C, P qui ne panchent pas plus du côté de *r* que du côté de *s*.

28. Avec une opération aussi simple que celle

(*a*) *Construction* Ce sont les suppositions accordées ou les lignes données que l'on employe à la résolution d'un Problême. Cela revient aux étais ou aux échaffaudages, dont on se sert pour la construction des édifices.

(*b*) *Plus grande que la moitié de r s....* C'est afin que les arcs, décrits des points *r*, *s* puissent s'entrecouper.

d'élever ou d'abaisser des perpendiculaires sur une ligne, on a construit deux instrumens beaucoup plus commodes que le rapporteur & le graphométre, pour avoir des angles droits ou, ce qui est la même chose, pour tracer des perpendiculaires sur le papier & sur le terrein; nous voulons parler de *l'équerre* & du *bâton d'Arpenteur*.

L'équerre est composée de deux régles AB, BC (fig. 34.) fixes ou mobiles, qui se rencontrent aux points B, S perpendiculairement, & dont par conséquent l'angle ABC est un angle droit. La matiére de cet instrument peut être de verre, de bois, de fer, de cuivre, &c.

Quand on veut avoir une perpendiculaire sur une ligne, on couche une des branches de l'équerre sur la ligne proposée, & l'on trace le long de l'autre branche un trait avec une pointe ou un crayon; ce trait est visiblement une perpendiculaire, ainsi que la branche de l'équerre (*a*).

Une équerre, qui ne seroit pas construite avec justesse, produiroit une fausse opération; c'est pourquoi il est utile de sçavoir vérifier cet instrument.

PROBLEME X.

29. Trouver le moyen de vérifier une équerre (fig. 35.).

(*a*) Les angles d'une table sont ordinairement des angles droits. Ceux d'un livre, des cartes à jouer, d'un dez, d'une régle le sont aussi. Les Artisans font un usage continuel de l'équerre. L'angle droit, que cet instrument donne, est le plus solide, le plus commode, & le plus gracieux de tous les angles. Que l'on fasse une table on un quadre dont les angles soient aigus & obtus, les enfans comme les hommes faits trouveront cette construction bisarre, incommode, de mauvais goût. La comparaison est le plus excellent moyen de former la raison des enfans; elle varie les objets, multiplie les principes d'expérience; & ce que l'on doit beaucoup considérer, elle fournit un aliment perpétuel à l'activité de l'enfance

RESOLUTION.

Posez l'équerre sur un plan, & tirez le long de ces deux branches les deux lignes A B, B D qui doivent se couper à angles droits au point de rencontre B. Prolongez une des lignes B D à liberté vers S. Ensuite du point B & à différentes ouvertures de compas, décrivez les demi circonférences O P T. Voyez si l'arc O P est toujours égal à l'arc P T ; cela doit être, si la ligne A B est perpendiculaire sur B D ; car la ligne A B, ne panchant d'aucun côté, fera l'angle A B S = l'angle A B D, & par conséquent l'arc O P, qui est la mesure de l'un, doit être égal à l'arc P T, qui est la mesure de l'autre.

Il est à propos de décrire plusieurs circonférences, parce qu'une différence insensible sur une petite devient très-apparente sur une grande.

30. Le bâton ou l'équerre d'Arpenteur représente un cercle traversé (fig. 36.) par deux régles immobiles A B, C D qui se coupent au centre à angles droits. Les extrémités de ces deux régles ou de ces deux diamétres portent des pinules semblables à celles du graphométre ; elles ont le même usage quand on opére sur le terrein. Cet instrument est soutenu par un support à trois branches. Il n'y a rien de plus commode pour élever ou abbaisser des perpendiculaires à toutes sortes de distances ; comme on va le voir par les Problêmes suivans.

PROBLEME XI.

31. Elever une perpendiculaire sur le terrein au point C d'une longueur donnée S D (fig. 37.).

PREMIERE RESOLUTION.

Prenez avec une corde les deux distances C B, C D égales entre elles. Aux points B, D plantez deux piquets. Attachez à ces deux piquets les deux extrémités d'une autre corde B O D, plus longue que la distance B D des piquets, & dont on ait marqué bien éxactement le milieu O. Tendez la corde par ce milieu, jusqu'à ce que vous sentiez que les deux moitiés B O, O D résistent également. Plantez un piquet au point O. Je dis que les deux points O, C seront dans une perpendiculaire sur sur la ligne S D. C'est la même démonstration qu'au Problême 8. (n°. 26.).

On pourra prolonger cette perpendiculaire C O suivant le besoin, comme on l'a enseigné n°. 7.

SECONDE RESOLUTION.

32. Vous pouvez élever une perpendiculaire sur le point S de la ligne A B (fig. 38.) avec l'équerre d'Arpenteur.

Disposez cette équerre de maniére que son centre réponde bien verticalement (*a*) sur le point S; alignez un des diamétres de l'instrument aux deux piquets A, *t*, plantez sur la ligne A B. Arrêtez l'instrument dans cette situation. Allez ensuite regarder le long de l'autre diamétre C D par les pinules qui sont à ses extrémités, & faites planter un piquet P dans l'alignement C D. La ligne P S sera perpendiculaire à la ligne A B, par la construction de

(*a*) *Verticalement*, c'est-à-dire, qui tombe bien perpendiculairement de haut en bas, comme feroit une balle de plomb suspendue librement à une corde.

l'équerre d'Arpenteur, dont les deux diamétres se coupent à angles droits.

33. Si vous vous défiez de la justesse de votre instrument, mettez le diamétre MN dans la direction SP; alors DC doit se trouver dans la direction de la ligne AB, c'est-à-dire, que si vous n'appercevez pas les piquets A, *t*, en regardant par les pinules D, C, l'équerre d'Arpenteur est mal construite.

PROBLEME XII.

34. Comme le point O, d'où l'on se propose de tracer une perpendiculaire sur le terrein, peut être hors de la ligne BD (fig. 37.), si la distance n'est pas considérable, on prendra une corde BOD, dont on marquera le milieu O, que l'on arrêtera au point O par le moyen du piquet OS. On tendra les deux moitiés OB, OD de la corde jusqu'à ce que les deux extrémités B, D de cette corde rasent la ligne SD aux points B, D où l'on plantera des piquets. On mesurera ensuite avec une autre corde la distance de B en D, dont on prendra le milieu C, en pliant la corde en deux parties égales que l'on portera de B ou de D en C. Comme on aura alors les deux points O, C chacun à égale distance de B & de D, la ligne OC qui passera par ces deux points ne panchera d'aucun côté, & sera par conséquent perpendiculaire à la ligne SD.

Ou bien quand la distance sera trop grande on se servira de l'équerre d'Arpenteur, & l'on commencera par planter un piquet au point P (fig. 38.) d'où l'on veut abbaisser une perpendiculaire sur la ligne AB. On fera courir ensuite l'équerre d'Arpenteur sur la ligne AB, jusqu'à ce que l'un de ses diamétres MN répondant bien éxactement à la

ligne AB, l'on apperçoive le piquet P par les pinules de l'autre diamétre CD. Au point S, où l'on aura fait cette observation, on plantera un piquet. Entre les points P, S on plantera d'autres piquets qui traceront la perpendiculaire PS. Ce qui est démontré par la seule position de l'instrument.

L'art de tracer une perpendiculaire sur le papier donne aussi le moyen de diviser une ligne en deux parties égales.

PROBLEME XIII.

35. Trouver le milieu C d'une ligne AB tracée sur le papier (*fig.* 39.).

RESOLUTION.

On trouve le milieu C d'une ligne AB sur le papier, en posant une des pointes du compas sur l'une des extrémités A : on donne au compas une ouverture plus grande que la moitié de la ligne AB, & de ce point l'on décrit deux arcs, l'un en-dessus & l'autre en-dessous de la ligne AB. Avec cette même ouverture de compas on fait une semblable opération au point B ; ce qui donne les deux points d'intersection *r*, *s*, par lesquels tirant *rs*, non-seulement cette ligne *rs* est perpendiculaire sur la ligne AB, mais elle la coupe en deux parties égales au point C.

DEMONSTRATION.

Que l'on se rappelle que deux points déterminent une ligne droite. Par la construction les points *r*, *s* de la ligne *rs* sont éloignés de A autant qu'ils

le sont de B : ainsi la ligne $r\,s$ pendant tout son cours ne s'approche pas plus de l'extrémité A que de l'extrémité B ; elle passe donc par le milieu C. C. Q. F. D. (a).

Vous prendrez sur le terrein le milieu de la ligne A B. (fig. 40.) en étendant une corde sur cette ligne, quand elle ne sera pas trop longue : on pliera la corde en deux parties égales, & l'on en portera la moitié depuis une extrémité A jusqu'au point O où elle se terminera sur la ligne A B : ce point O en sera le milieu.

Mais la longueur de la ligne A B peut être si considérable que les plus longues cordes n'y suffiroient pas ; on prendra donc la valeur de cette ligne en toises, pieds, pouces, &c. ou en d'autres longueurs dont on conviendra : la moitié du nombre de ces longueurs, portée sur la ligne proposée, en déterminera le milieu.

Ou bien, ce qui sera plus court, on tendra une corde sur la ligne A B autant de fois qu'il en sera besoin, pour avoir à peu près la moitié de cette ligne. On tendra, par exemple, cette corde de A en R, de R en C, de C en D, de D en G qui approche d'être la moitié de la ligne A B. On ira ensuite à l'autre extrémité B, où l'on tendra la corde quatre fois depuis B jusqu'en M, comme l'on a fait depuis A jusqu'en G : après quoi on aura facilement le milieu O de la petite longueur G M en pliant en deux parties égales la corde qui servira à la mesurer : il est clair que le milieu de l'étendue G M sera aussi celui de la ligne A B.

Cette maniére d'avoir le milieu d'une ligne fort étendue sur le terrein est aussi fort commode sur

(a) Ces quatre lettres C. Q. F. D. signifient ce qu'il falloit démontrer.

étendue

le papier, lorsque l'on n'a pas un compas assez grand.

Quand le point G passeroit le milieu de la ligne AB, de même que le point M, il ne faudroit pas s'en embarrasser; on aura toujours le milieu de la ligne A B en prenant la moitié de la distance qui se trouvera entre les deux dernières portées. L'opération porte avec elle sa démonstration.

On détermine aussi la moitié d'un angle sur le papier de la même manière à peu près que l'on coupe une ligne droite en deux parties égales. On fera simplement réfléxion que, les arcs étant la mesure naturelle des angles, couper un angle en deux parties égales, c'est la même chose que de couper par le milieu l'arc, qui est la mesure de cet angle.

PROBLEME XIV.

36. Déterminer la moitié de l'angle BAC sur le papier (fig. 41.).

RESOLUTION.

Du sommet A décrivez l'arc BC d'une ouverture de compas à volonté: vous avez par-là le point A de la ligne AD, éloigné de B autant qu'il l'est de C. De ces points B, C, & d'une ouverture de compas, plus grande que la moitié de la longueur BC, décrivez deux arcs qui s'entrecoupent au point D; cet autre point D de la ligne AD est à égale distance des points B, C. La ligne AD passe donc par le milieu de l'arc BC; elle coupe par conséquent en deux parties égales l'angle, dont cet arc est la mesure.

Cette opération est tout aussi simple sur le terrain que sur le papier; car après avoir connu, par le

moyen du graphométre, (n°. 24.) la valeur en degrés de l'angle B A C, la moitié du nombre de ces degrés déterminera sur le graphométre la moitié de l'angle B A C. Plaçant donc l'alidade de l'instrument au nombre qui désignera cette moitié, on fera planter des piquets dans l'alignement de l'alidade, & l'on aura une ligne sur le terrein, qui coupera en deux parties égales l'angle B A C proposé.

La perpendiculaire, qui donne des angles droits, qui sert à diviser une ligne & un angle en deux parties égales, a encore une autre propriété qui mérite d'être remarquée.

37. Du point A au côté BC de la muraille M (fig. 42.) il y a bien des chemins. On peut y aller en suivant les routes AB, AN, AS, AT, AC, &c. qui sont toutes des lignes droites : mais celui qui du point A, regardant la muraille BC en face, prendroit les routes AC, AB, n'arriveroit pas sur le côté BC par le plus court chemin. On sent qu'en marchant directement devant soi sur la ligne AS, qui ne se détourne ni à droite ni à gauche, on suivroit la voye la plus naturelle. Or une ligne, qui tend vers une autre sans s'incliner d'aucun côté, est une perpendiculaire. Ainsi une ligne AS, menée perpendiculairement du point A au côté BC, détermine le plus court chemin qu'il y ait d'un point à une ligne.

38. La perpendiculaire AS est donc la véritable distance ou la distance naturelle du point A à la ligne BC (fig. 42.) & il ne peut pas y en avoir une autre aussi courte : car pour peu que l'on s'en écarte, on prendra sur la droite ou sur la gauche, & l'on ne marchera point directement en face de la ligne BC (a).

(a) Les Commençans sont portés à appeller les perpendiculaires simplement des lignes droites, comme si les obliques n'étoient pas

Toutes ces pratiques, dont la suite fera encore mieux connoître l'utilité, sont uniquement fondées sur la simple considération d'une ligne droite qui en rencontre une autre. Nous allons continuer nos observations sur le même objet ; elles nous fourniront un principe très-fécond, avec lequel nous démontrerons dans le Chapitre suivant tout ce que la Géométrie renferme de plus essentiel.

39. On a pû remarquer, en voyant l'équerre d'Arpenteur, que deux lignes, qui s'entrecoupent, forment quatre angles, deux en-dessus & deux en-dessous de la ligne AB. (fig. 36.) Que la ligne CD, tombant perpendiculairement sur la ligne AB, donne quatre angles droits, dont la circonférence entiére est la vraye mesure : ainsi la demie circonférence est la mesure de deux angles droits, comme il est évident dans cette figure où les angles *r*, *s* sont droits.

Mais soit que la ligne CD tombe perpendiculairement sur AB, soit qu'elle lui soit oblique (*fig.* 43.) les deux angles *r*, *s*, pris ensemble du même côté de la ligne AB, valent toujours la somme de deux angles droits ; puisqu'ils sont mesurés par une demie circonférence.

aussi des droites. Afin donc que les jeunes gens prennent de la perpendiculaire une idée qui la caractérise bien particuliérement, on doit leur faire observer qu'elle n'est pas ainsi appellée ; parce qu'elle est droite ; mais parce qu'elle a la proprieté de ne s'incliner d'aucun côté. De même les lignes ponctuées AB, AC ne cessent pas d'être droites ; à cause qu'elles sont inclinées ; on leur donne le nom d'*obliques* pour exprimer la propriété qu'elles ont de pancher. Les Maîtres doivent aussi être fort attentifs à faire remarquer la différence qu'il y a entre une perpendiculaire & une verticale ou une ligne à plomb. Une ligne peut être perpendiculaire, sans être verticale ; pour qu'elle ait cette propriété, il suffit qu'elle rencontre une autre ligne à angles droits ; au lieu qu'une verticale est une ligne qui tombe perpendiculairement de haut en bas, comme qui diroit du sommet de la tête aux pieds. Un arbre, les édifices s'élévent verticalement sur la surface de la terre : mais le côté d'une table est perpendiculaire à celui qu'il rencontre, & il n'est pas verticali

Il y a plus, tous les angles r, s, t, x, y (fig. 44.), que l'on peut former autour du même point D du même côté de la ligne A B, pris ensemble, ne valent que deux angles droits. Ce que la figure démontre suffisamment.

40. Puisque la circonférence d'un cercle quelconque contient 360 degrés; la demie circonférence ou la mesure de deux angles droits = 180 degrés, moitié de 360, & l'angle droit = 90 degrés, moitié de 180 degrés. L'angle obtus, qui est plus grand qu'un droit, peut donc croître depuis 90 degrés jusqu'à 180 degrés; & l'aigle aigu, qui est plus petit qu'un droit, peut l'être depuis 1 jusqu'à 90 exclusivement (*a*).

41. Il suit de tout ceci que connoissant en degrés l'angle r (fig. 43.) on connoîtra son angle de suite s; car supposant $r = 127$ degrés, vous direz $127 + s = 180$ degrés; donc $s = 180 - 127 = 53$ degrés, c'est-à-dire, qu'il n'y a qu'à retrancher l'angle connu $r = 127$ de 180 degrés, l'on aura 53 degrés pour la valeur de l'angle s.

C'est par ce même moyen que l'on peut résoudre le Problême suivant.

PROBLEME XV.

41. Deux murailles se rencontrent au point C. (fig. 42.) On voudroit sçavoir la valeur de l'angle B C M, sans entrer dedans.

RESOLUTION.

Appliquez sur la muraille B C une régle qui s'é-

(*a*) Cela se démontre aux yeux avec les branches d'un compas; on peut d'abord les disposer à angles droits; & les ouvrant ensuite ou les fermant, on verra jusqu'où l'angle obtus peut croître, & jusqu'où l'angle aigu peut décroître.

tende vers D, il naîtra au point C un angle MCD en dehors; dans lequel on peut entrer. Mesurez cet angle, que je suppose de 58 degrés, & retranchez cette valeur de 180 degrés, vous aurez 122 pour la valeur de l'angle BCM, au-dedans duquel il n'est pas possible d'opérer.

Comme la vérité, qui a servi à la résolution de ce Problême, va être la source d'où découlent les vérités suivantes; afin qu'on se la grave bien dans la mémoire, nous en ferons notre proposition 1re.

PROPOSITION. I. (*a*).

42. Une ligne droite CD (fig. 43.), qui rencontre une autre *ligne* droite AB, forme au point de rencontre D deux angles *s*, *r*, lesquels pris ensemble valent la somme de deux angles droits.

DEMONSTRATION.

Du point D décrivez une demie circonférence; elle est la mesure des deux angles *r*, *s*; mais une demie circonférence est aussi la mesure de deux angles droits; les deux angles *s*, *r* pris ensemble valent donc deux angles droits.

COROLLAIRE (*b*).

Il est clair par cette proposition que l'un des deux angles étant droit, l'autre le sera aussi; mais si l'un est aigu ou plus petit qu'un droit, l'autre sera ob-

(*a*) *Proposition*. C'est un discours par lequel on énonce une vérité démontrée ou que l'on se propose de démontrer.

(*b*) *Corollaire*. C'est une conséquence qui se déduit immédiatement d'une proposition, mais qui ne fait pas chaîne avec les propositions. Voyez plus particuliérement (no. 78. note *a*) ce que c'est qu'un Corollaire.

tus ou plus grand qu'un droit ; par la raison que le défaut de l'un doit être compensé par l'excès de l'autre.

43. Prenons maintenant la conclusion de la Proposition première, comme une chose connue ou accordée, & voyons si on pourroit en déduire le principe, c'est-à-dire, supposons qu'à la rencontre D de deux lignes A B, C D, il se forme deux angles A D C, C D B (fig. 45.), lesquels pris ensemble valent deux angles droits, & de cette supposition essayons de conclure que la ligne A D B est nécessairement une ligne droite.

Je dis donc que la ligne A D B, qui fait au point D les deux angles A D C, C D B égaux ensemble à la somme de deux angles droits par sa rencontre avec la droite C D, est nécessairement une ligne droite.

DEMONSTRATION.

La démonstration de cette vérité est fondée sur la Proposition première & sur les Axiômes suivans.

Premier Axiome.

Le tout est plus grand qu'une de ses parties, ou ce qui est la même chose, il est impossible qu'une partie soit égale au tout dont elle est partie.

Second Axiome.

Une chose possible est réelle, quand on ne sçauroit la nier sans tomber daus une contradiction.

Troisieme Axiome.

Deux grandeurs égales à une troisiéme sont égales entr'elles.

QUATRIÈME AXIOME.

Si de grandeurs égales on retranche la même grandeur ou des grandeurs égales, les restes seront égaux.

Supposons donc que D B ne soit pas dans une même ligne droite avec A D, quoiqu'il soit accordé que les deux angles A D C, C D B pris ensemble valent deux angles droits (*a*); il est très-possible de prolonger A D en ligne droite, dont le prolongement ira, si l'on veut, vers S en-dessus ou en-dessous de D B. Dans ce cas, puisque A D S est une ligne droite, les deux angles A D C, C D S $= 2r$ (n°. 42.); mais, par la supposition, les deux angles A D C, C D B $= 2r$; par conséquent (Axiôme 3.) A D C + C D S = A D C + C D B. Otant de part & d'autre l'angle commun A D C, on aura (Axiôme 4.) l'angle C D S = l'angle C D B; ce qui est impossible (Axiôme 1.); il est donc aussi impossible que la ligne A D B ne soit pas une ligne droite; puisqu'on ne sçauroit le nier, sans tomber dans une contradiction.

44. Quand on met en supposition une vérité, que l'on vient de démontrer, pour en déduire le principe qui a servi à sa démonstration, c'est-à-dire, que la conclusion devient principe & le principe conclusion; la proposition qui exprime cela s'appelle l'*inverse* ou la *converse* de celle qui la précéde: ainsi la proposition, que nous venons de démontrer, est la converse de la premiére Proposition (*b*).

(*a*) La valeur de deux angles droits sera doresnavant exprimée par $2r$, afin d'abréger le discours.

(*b*) Plusieurs d'entre les Modernes, qui nous ont donné des élémens, ont extrêmement négligé la Démonstration des propositions inverses. Il y en a même quelques-uns qui ont demandé qu'on leur accordât la vérité de ces propositions comme une chose évidente

Faisons présentement croiser les deux lignes AC, DB au point O (fig. 46.). Les angles AOD, COB sont dits *opposés au sommet* aussi-bien que les angles AOB, DOC. Nous allons démontrer qu'il y a égalité entre ces angles pris deux à deux, c'est-à-dire, que AOD = COB & AOB = DOC.

PROPOSITION SECONDE.

45. Les angles AOD, COB opposés par le sommet, qui sont formés par le croisement des deux lignes droites AC, DB, sont égaux. Les angles DOC, AOB le sont aussi.

DEMONSTRATION.

Que l'on se rappelle la proposition première (nº. 42.) on verra que AOD + DOC = 2r,

d'elle-même, ou tout au moins comme une chose qui est généralement vraye.

Cette prétention ne rend coupable que de trois fautes capitales. La premiere consiste à n'avoir pas remarqué qu'il y a des inverses absolument fausses. Nous le ferons voir en temps & lieu. On se convaincra de la seconde, si l'on fait réflexion qu'il ne suffit pas à une proposition d'être vraye pour être reçue, il faut encore qu'elle soit démontrée; autrement il seroit libre de supprimer toutes les démonstrations en Géométrie. La troisiéme faute, qui nous paroit être la source des deux premiéres, est que ces Modernes ont abandonné la partie la plus épineuse de leur ouvrage. On doit leur rendre la justice qu'ils se sont assez bien acquittés de la moitié la plus aisée : mais les Géométres, qui ne se sauvent de l'illusion des sens que par la sévérité de leurs démonstrations, ne sçauroient souffrir que l'on traite indifferemment tout ce qu'il y a de plus serieux en Géométrie : or c'est la démonstration des inverses qui cause le plus d'embarras. J'en fais juges tous ceux qui ont un peu travaillé de tête sur la Géométrie ; c'est pourquoi on ne parlera point de ces propositions aux enfans, à moins qu'elles ne soient fort simples : on leur supposera comme vrayes celles d'entre elles qui ont cet avantage, afin de résoudre les problêmes qui en dépendent ; car il est assez remarquable que la solution d'un grand nombre de problêmes Géométriques est presque toute fondée sur la verité des propositions inverses.

& que DOC + COB = $2r$: mais deux quantités égales à une même quantité sont égales entre elles : par conséquent AOD + DOC = = DOC + COB ; ôtons la quantité commune DOC ; il restera l'angle AOD = l'angle COB. C. Q. F. 1°. D.

Appliquez le même raisonnement aux deux angles DOC, AOB, vous aurez (n°. 42.) DOC + + COB = $2r$. De même AOB + COB = = $2r$. Donc DOC + COB = AOB + COB, ôtons l'angle commun COB, on aura l'angle DOC = l'angle AOB. C. Q. F. 2°. D. (*a*).

Mais l'inverse de cette proposition est-elle vraye ? C'est-à-dire, lorsque deux angles, dont le sommet est au même point D, sont égaux, ces deux angles sont-ils nécessairement opposés par le sommet & formés par le croisement de deux lignes droites ?

Il est clair que les deux angles r, y (fig. 44.) peuvent être égaux, quoiqu'ils ne soient pas opposés par le sommet, ni formés par le croisement de deux lignes droites. Ainsi la converse de la proposition seconde est fausse.

46. Le problême 15 (n°. 41.) que nous avons résolu par la proposition première, peut aussi se ré-

(*a*) Comme nous écrivons pour ceux qui doivent enseigner, nous ne négligeons pas les démonstrations régulières, nous réservant d'indiquer dans des notes les preuves oculaires ou de sentiment dont on doit faire usage, sur-tout à l'égard des enfans qu'il faut accoutumer au raisonnement par les voyes les plus frappantes.

On décrira donc un cercle du point O, & on leur fera mesurer les arcs AD, BC opposés ; ils les trouveront égaux ; & par-là ils jugeront de l'égalité des angles dont ces arcs sont la mesure.

On peut encore leur faire sentir cette vérité, en faisant tourner une régle mobile DB autour du centre O d'un cercle où les degrés soient écrits. En couchant d'abord la règle mobile DB sur le diamétre fixe AC, si-tôt que l'on fera mouvoir cette régle, ils verront qu'il se produira en-dessous de AC precisément la même chose qu'en-dessus. Il est aussi à propos de leur faire compter les degrés compris entre les angles que l'on assure être egaux.

soudre par cette proposition seconde. On se servira du *recipiangle* ; c'est un instrument (fig. 47.) composé de deux régles G S, M N, qui se croisent au point O, où elles sont attachées par un *axe* (*a*), autour duquel elles peuvent tourner librement. Une des branches O S de cet instrument porte un demi-cercle divisé en ses degrés. Ce demi-cercle coule librement dans une fente faite à une des branches O N de l'autre régle M N ; ensorte qu'en ouvrant plus ou moins les régles d'un côté, on trouve de l'autre plus ou moins de degrés renfermés entre elles.

Ajustez donc le recipiangle (*b*) à l'angle O de la

(*a*) *Axe.* C'est un essieu ou une petite cheville autour de laquelle peuvent tourner les deux régles qu'elle assemble.

(*b*) *Recipiangle.* Ce mot est composé des deux mots latins *recipere* recevoir, & *angulus* angle, d'où l'on a composé *Recipiangle*, c'est-à-dire, instrument qui reçoit un angle. Avant que d'opérer sur le terrein ou de prendre l'angle d'un appartement, on expliquera la structure de cette machine, le recipiangle en main. Les enfans ou les jeunes gens, qui apprennent les Mathématiques, doivent être fournis de tous les instrumens dont nous avons parlé jusqu'à présent. A l'exception de l'astrolabe ou du graphométre simple, qui vaut à peu près 50 liv. la régle, le compas, le rapporteur, l'équerre, la chaine divisée en toiles, pieds, pouces, &c. les piquets, le cordeau, l'équerre d'Arpenteur, le recipiangle, tous ces instrumens sont à très-bon marché. Je ne sçaurois trop recommander que l'on mette très-souvent ces instrumens entre les mains des enfans ; le continuel usage qu'ils en feront leur donnera beaucoup d'adresse, parce que l'on aura occasion de leur faire remarquer les négligences qu'ils pourroient y commettre, & je ne sçais combien de petites attentions, d'où dépend toute la justesse d'une opération.

Ce que je dis ici doit être très-sérieusement considéré à l'égard des enfans ou des jeunes gens destinés à l'état militaire. On n'a pas toujours des Ingénieurs avec soi : la tête leur tourne quelquefois sous le feu de l'ennemi. Ils peuvent être tués ou blessés ; néanmoins le temps presse, il faut se loger ou être passé par les armes. C'est alors qu'un Officier instruit montrera avec distinction son sçavoir faire. Prévenu des endroits d'où peut venir le feu de l'ennemi, ou le découvrant assez facilement par son habitude à l'application, il donnera à son logement une direction sure ; il sera redevable à ses lumiéres de la conservation de sa vie, & de celle des Soldats qu'il aura sous ses ordres.

Que l'on prenne bien garde à ce que je vais dire ; la Théorie n'est qu'une pratique anticipée. C'est une connoissance réfléchie de ce que les gens sensés de notre métier ont fait avant nous ou de ce qu'ils au-

muraille, de maniére que ses deux bras MO, GO embrassent bien éxactement les deux faces, & comptez les degrés qui se trouvent entre les deux autres bras OS, ON, ce sera la valeur de l'angle GOM que forment les deux murailles; puisque les angles opposés au sommet sont égaux.

Quand on veut mesurer une ligne droite, il n'est pas toujours possible d'appliquer une mesure dessus. La ligne AB (fig. 48.) peut représenter la longueur d'un marais, d'un étang, d'un lac (*a*), d'un endroit enfin si couvert qu'il n'est pas possible d'en parcourir l'intérieur; cependant, pourvu que la longueur AB soit accessible par ses extrémités A, B, on pourra la mesurer, en faisant usage de la proposition seconde où l'égalité des angles opposés au sommet est démontrée.

roient pû faire dans des cas pareils à ceux où nous sommes & à ceux où nous pouvons nous trouver. Je n'ai que faire de prouver aux personnes éclairées ce que je viens d'avancer : pour celles qui n'ont de foi qu'à l'expérience actuelle, je les appelle à l'expérience même. Alexandre étoit fort éclairé, Cesar l'étoit encore plus, & Lucullus, au sortir de son Cabinet, bat Mithridate qui avoit vieilli sous les armes.

Présentez à l'éxécution un homme déja préparé par une bonne Théorie, je conviens qu'il ressemblera d'abord à ceux qui n'ont jamais mis la main à l'ouvre; mais quand il aura eu le temps de se reconnoître, un coup d'œil lui tracera dans le même tableau tout ce que l'on fait & tout ce que l'on doit faire. Celui qui ne roule que dans le cercle étroit de son expérience, voit peut-être ce qui se passe à son poste, au-delà c'est un nuage; mais un homme rempli de connoissances est, pour ainsi dire, à tous les postes; il n'est nouveau nulle part : vous le changez de situation : il a dans la tête un instrument qui va à tout : il prendra sa résolution des circonstances mêmes. L'art de penser ressemble à tous les Arts, c'est un métier. On ne trouve pas de grandes difficultés à faire sur le champ une chose que l'on a toujours faite.

(*b*) Il arrive fort souvent que les enfans n'ont aucune idée d'un marais, d'un étang, d'un lac : il faut leur en faire voir, si l'on est à portée ou y suppléer par une bonne explication.

Un marais est une étenduë de terrein humide, bourbeux, couvert d'eaux croupissantes, parce qu'elles n'ont point assez de pente pour s'écouler.

L'Etang est un lieu bas fermé par une élévation de terre tout autour, où l'on réserve de l'eau douce, pour nourrir du poisson.

Un Lac est un grand amas d'eaux douces, fournies ordinairement par les montagnes qui l'environnent.

PROBLEME XVI.

47. Déterminer la longueur de la ligne AB qui n'est accessible que par ses extrémités A, B. (fig. 48.).

RESOLUTION.

Choisissez un point O, d'où vous puissiez aller aux extrémités A, B, en marchant sur les lignes OA, OB que vous mesurerez; vous prolongerez ensuite AO, jusqu'en un point D tel que OD = AO. Vous ferez aussi le prolongement OC = BO; appliquant enfin une mesure sur CD, qui marque la distance des points C, D, vous trouverez par-là la longueur de la ligne AB; car CD = AB, ainsi que nous allons le démontrer.

DEMONSTRATION.

L'angle AOB = l'angle COD qui lui est opposé au sommet (n°. 45.) & (par la construction) AO = OD & BO = OC; l'angle COD n'a donc rien par où il différe de l'angle AOB; par conséquent la distance CD des extrémités C, D est égale à la distance AB des extrémités A, B. C. Q. F. D.

On appelle *base d'un angle* le côté opposé à cet angle: ainsi le côté CD est la base de l'angle COD.

COROLLAIRE.

48. Concluez donc de la démonstration du problême précédent que deux angles égaux, dont les côtés sont aussi égaux, chacun à chacun, ont nécessairement des bases égales.

Nous venons de voir tout ce que l'on peut tirer à peu près de la considération de deux lignes droites qui se rencontrent. Celles qui ne sont pas déterminées à se rencontrer, comme les lignes AB, CD, (fig. 49.) ne fournissent guéres plus de propriétés qu'une seule ligne droite AB. La ligne CD, qui a la même tendance que AB, n'en est, pour ainsi dire, que la répétition ; on remarque seulement que l'espace *sx*, renfermé entre ces lignes ; pourroit être uniforme : faisant ensuite réfléxion que ces lignes n'ont aucune tendance l'une vers l'autre, on concevra qu'elles ne s'approchent pas davantage du côté de *s* que du côté de *x*. Deux lignes ainsi disposées sur un plan s'appellent *paralléles*.

CHAPITRE QUATRE.

De deux lignes droites combinées avec une troisiéme ligne droite. Propriétés très-simples. Effets merveilleux qui en résultent.

49. POussons donc plus loin les combinaisons ; remontons à la génération des paralléles ; supposons que la ligne EF soit coupée par les lignes AB, CD (fig. 50.) avec la même inclinaison. Ce qu'il est très-facile d'exécuter, en faisant l'angle *b* égal à l'angle *f* (nº. 18.). Ces deux lignes AB, CD également inclinées sur la ligne EF nommée *secante* nous offrent huit angles ; quatre en dehors ou *extérieurs*, quatre en dedans appellés *intérieurs* ou internes. Les extérieurs sont *a*, *b*, *s*, *x*, & les internes sont *c*, *d*, *g*, *f*.

Deux angles tels que *c*, *f*, l'un pris en haut

d'un côté de la sécante, & l'autre en bas de l'autre côté de la même sécante, en dedans des lignes AB, CD, sont appellés *alternes internes*. Les deux angles d, g sont des *alternes internes*. C'est la même chose par rapport aux angles extérieurs. a est *l'alterne extérieur* de x, de même que l'angle b est *l'alterne extérieur* de s.

Nous allons faire voir qu'il y a égalité entre ces angles alternes pris deux à deux.

PROPOSITION III.

50. Les angles c, f alternes internes sont égaux. Il faut prouver que $c = f$, ou que $d = g$. Pour cela on doit se rappeller la proposition seconde (fig. 50.).

DEMONSTRATION.

Par la disposition des lignes AB, CD sur la sécante EF, $f = b$; mais $b = c$ (n°. 45.) ainsi $c = f$.

Faites le même raisonnement par rapport aux angles d, g. Vous avez, par la construction, $g = a$. Or $a = d$, par conséquent $g = d$. C. Q. F. D.

La converse de cette proposition est vraye, c'est-à-dire, que si les angles c, f alternes internes sont égaux, les lignes AB, CD seront également inclinées sur la sécante EF.

On a donc à prouver que, si $c = f$, on aura nécessairement $b = f$, ce qui est bien évident; car puisque l'on suppose $f = c$, & que l'on sçait (n°. 45.) que $c = b$, c'est une nécessité que $f = b$, ou que les lignes AB, CD soient également inclinées sur la sécante EF.

PROPOSITION IV.

51. Les angles b, s alternes extérieurs sont égaux.

On va démontrer que $b = s$ ou que $a = x$. On doit avoir bien présente à l'esprit la proposition 3.

DEMONSTRATION.

$b = c$ (n°. 45.), $c = f$ (n°. 50.), $f = s$ (n°. 45.); donc $b = s$. Voici la suite de ces égalités, $b = c = f = s$; ainsi $b = s$.

De même $a = d = g = x$; par conséquent $a = x$ C. Q. F. D.

La converse est aussi très-véritable; car si $b = s$, comme on voit que $s = f$, on aura $b = f$, c'est-à-dire, que les lignes A B, C D seront également inclinées sur la sécante E F.

PROPOSITION V.

52. Deux angles extérieurs a, s du même côté de la sécante, pris ensemble, valent la somme de deux angles droits.

On se propose de faire voir que $a + s = 2r$, ou que $b + x = 2r$. Avant que de procéder à la démonstration, on doit se rappeller la proposition première (n°. 42.) & la proposition quatriéme.

DEMONSTRATION.

$b + a = 2r$ (n°. 42.). Or $b = s$ (n°. 51.); donc $s + a = 2r$.

Dites encore $b + a = 2r$, mais (n°. 51.) $a = x$; donc $b + x = 2r$. C. Q. F. D.

Mais si $b + x = 2r$, on en peut conclure que

$b = f$, c'est-à-dire, que les lignes AB, CD sont également inclinées sur la sécante EF; ce que l'on fait voir ainsi. Par la supposition $b + x = 2r$; mais (n°. 42.) $f + x =$ aussi $2r$. Donc $b + x = f + x$. Ainsi $b = f$. Cette conclusion est la converse de la proposition 5.

PROPOSITION VI.

53. Deux angles internes d, f, du même côté de la sécante EF, pris ensemble, valent aussi la somme de deux angles droits, c'est-à-dire, que $d + f = 2r$, ou que $c + g = 2r$. Que l'on se souvienne de la proposition 5.

DEMONSTRATION.

$b + x = 2r$ (n°. 52.). Or $b = f$ & $x = d$ (par la supposition); ainsi $f + d = 2r$.

De même $a + s = 2r$; mais $a = g$ & $s = c$. Donc $c + g = 2r$.

La converse de cette proposition est aussi très-vraye; c'est-à-dire, que si $f + d = 2r$, on en peut conclure que $f = b$ ou que les lignes AB, CD sont également inclinées. Ce que je fais voir ainsi.

Par la supposition $f + d = 2r$. Mais (n°. 42.) $b + d = 2r$. Donc $f + d = b + d$, ôtant d de part & d'autre, il reste que $f = b$ (a).

(a) J'ai oublié de dire qu'il est très-essentiel d'écrire les équations ou les égalités, à mesure que l'esprit les découvre. On ne sçauroit croire combien un artifice aussi simple met l'intelligence à son aise. Avec cela il n'est besoin d'aucun effort de mémoire; on a sous les yeux, pour ainsi dire, les matériaux de son raisonnement, & même le raisonnement tout entier.

J'aurois pû démontrer la proposition 6 d'une maniére un

54.

54. Nous avons considéré (fig. 51.) les lignes AB, CD coupées par la ligne EF, sans avoir égard à l'espéce des angles EOB, OSD que nous avons simplement supposés égaux (n°. 49.); mais si les angles EOB, OSD étoient droits, les lignes BA, DC seroient toutes deux des perpendiculaires, elles n'inclineroient d'aucun côté; par conséquent elles n'auroient aucune tendance l'une vers l'autre; les lignes AB, CD seroient donc des paralléles (n°. 48.).

55. Mais soit que les lignes AB, CD soient perpendiculairee sur EF, soit qu'elles soient inclinées dessus, pourvu qu'elles le soient également, comme nous l'avons supposé dans les propositions précédentes, elles seront toujours paralléles; car si BO prend la situation OM, il faudra que DS, pour être également inclinée, devienne SN, en dé-

peu plus simple: je conseille même qu'on l'a démontre aux enfans ainsi que je vais l'exposer. $b + d = 2r$; or $b = f$, donc $f + d = 2r$. De même $a + e = 2r$; mais $a = g$; donc $g + e = 2r$, ce qui est plus simple que ma démonstration. Mais je n'aurai pas à me justifier devant les bons esprits, qui sçavent qu'une démonstration éxige deux conditions; il ne suffit pas qu'elle soit simple, il faut encore qu'elle soit déduite de la proposition qui précéde immédiatement; c'est-à-dire, que la proposition précédente doit contribuer à la démonstration de la suivante. Autrement l'ordre est renversé. C'est à quoi n'ont pas assez pensé nos Modernes, qui ont écrit sur la Géométrie. Pour les anciens, quelque respectables qu'ils soient, on est forcé de les abandonner sur cet article.

Ceux qui brûlent pour eux un encens perpétuel seront peut-être choqués de ma franchise; cependant, comme je n'écris pas purement une critique, je m'engage à leur donner une ample satisfaction Quand ils voudront. En attendant, je les prie de revenir sur leur premier jugement. peut-être ne trouveront-ils pas le mien si étrange; car souvent le meilleur moyen de prouver une vérité, c'est d'y faire penser ceux qui ne la croyent pas.

crivant le petit arc DN égal au petit arc BM qu'aura tracé BO. Ainsi DS devenant NS fuira BO autant que celle-ci s'est approchée, en devenant OM. Ces lignes continuant à s'incliner également sur la même ligne EF n'auront donc jamais aucune tendance l'une vers l'autre. On peut par conséquent assurer généralement que deux lignes, qui coupent une troisiéme ligne avec une même inclinaison, sont paralléles entre elles. Ainsi les propriétés que nous avons démontrées dans les propositions 3, 4, 5, 6 appartiennent à des lignes paralleles (*a*).

PROPOSITION VII.

56. Il est aisé de s'appercevoir qu'une ligne MN (fig. 52.) perpendiculaire sur une des paralléles CD, le sera aussi nécessairement sur l'autre AB. Rappellons-nous la proposition 6.

DEMONSTRATION.

Les lignes AB, CD étant paralléles $d + f = 2r$ (n°. 53.) mais, par la supposition, f est un

(*a*) Je ne crois pas devoir avertir que l'on doit supprimer aux enfans tous les raisonnemens qui éxigent quelque contention : ainsi les nombres 54 & 55 ne sont pas faits pour eux; il suffira de leur faire voir que deux lignes, qui en coupent une troisiéme avec la même inclinaison, sont paralléles, c'est-à-dire, sont toujours à égale distance l'une de l'autre : comme c'est-là une vérité fort simple, les seuls yeux en font la démonstration. Quand leur intelligence aura acquis quelque force; on appuyera le jugement des sens par le jugement de la réfléxion.

Cependant on fera remarquer aux enfans que l'Architecture & tous les Arts font un très-grand usage des paralléles. Ce sont des lignes paralléles qui terminent les plattes-bandes & les allées d'un jardin. Les arbres, qui forment les avenues d'une maison de campagne, sont plantés parallélement; les portes d'un appartement, le plafonds d'un salon, nos meubles les plus commodes, une glace de miroir, des carreaux de vitre, une table, un livre, un carton, tout offre aux enfans des lignes paralléles.

angle droit, *d* l'eſt donc auſſi, par conſéquent M N eſt perpendiculaire ſur A B. C. Q. F. D.

Et ſi l'on ſuppoſoit que M N eſt perpendiculaire ſur A B, on en concluroit auſſi facilement qu'elle eſt perpendiculaire ſur C D. Ce qui eſt l'inverſe de la propoſition précédente.

COROLLAIRE I.

57. Puiſque les paralléles A B, C D (fig. 56.) n'ont aucune tendance l'une vers l'autre, il s'enſuit qu'en quelque point que l'on ſe mette ſur l'une on ſera toujours également éloigné de l'autre. Mais nous avons vû que la perpendiculaire exprime la véritable diſtance qu'il y a d'un point à une ligne (n°. 37.). Les perpendiculaires M N, O S compriſes entre les paralléles A B, C D ſont donc égales.

COROLLAIRE II.

58. Faiſons préſentement M H = O P (fig. 53.) afin que les lignes N H, S P ſoient également inclinées du même côté. Dans cette ſuppoſition N H = S P; car l'angle N M H = l'angle S O P (conſtruction) & N M = S O, M H = O P (auſſi par la conſtruction) ainſi l'angle N M H ne différe en rien de l'angle S O P, par conſéquent N H = S P, c'eſt-à-dire, que les lignes paralléles ou également inclinées du même côté entre paralléles ſont égales (*a*).

Mais la converſe de cette propoſition eſt fauſſe, c'eſt-à-dire, il eſt faux que des lignes égales, poſées

(*a*) Comme cette vérité parle ſuffiſamment aux yeux, il ne ſera pas beſoin avec les enfans de faire les frais d'une démonſtration; on ſe contentera de leur faire conſtruire la figure. Etant obligés par-là de la conſidérer quelque temps, la vérité leur reſtera.

entre mêmes paralléles, soient nécessairement inclinées du même côté, ou soient nécessairement paralléles.

Pour en avoir une démonstration bien sensible, prenez O G = O P, vous aurez S G = S P, qui assurément ne sont pas paralléles; quoiqu'elles soient égales & posées entre mêmes paralléles A B, C D.

59. Le Corollaire premier peut servir à la résolution du problême 16, c'est-à-dire, à déterminer la longueur A B d'un lac ou d'un étang que l'on ne sçauroit traverser (fig. 54.).

On n'a qu'à élever sur les extrémités A, B les perpendiculaires égales A C, B D; en mesurant la distance C D des extrémités C, D, on aura la longueur de la ligne A B. Cela saute aux yeux.

On peut aussi faire usage de ce Corollaire pour continuer une ligne droite, lorsqu'il se rencontre quelque obstacle à son prolongement.

PROBLEME XVII.

60. Prolonger la ligne A B malgré l'obstacle impénétrable M N (fig. 55.).

RESOLUTION.

Quand vous serez arrivé au point B, au-delà duquel il n'est pas possible de s'avancer, vous vous détournerez à angles droits sur B G, sur laquelle vous vous étendrez jusqu'à un point G, où faisant un autre retour à angles droits vous puissiez marcher sur la ligne G H, qui vous dégage de l'obstacle M N. Arrivé au point H, où vous appercevrez que vous pouvez vous rapprocher de la ligne A B L S, vous ferez le retour H L, toujours à angles droits, égal

au détour BG, & le point L se trouvera dans le prolongement de la ligne AB. Faisant encore un quart de conversion vers S, c'est-à-dire, traçant une perpendiculaire LS, elle sera le prolongement de la ligne AB.

Une démonstration ne seroit pas plus parlante que la figure.

La Théorie (*a*) des paralléles, que nous venons d'établir, va nous servir à construire ces lignes sur le papier & sur le terrein.

PROBLEME XVIII.

61. Par le point O mener une paralléle CD à la ligne AB donnée sur le papier (fig. 57.).

RESOLUTION.

Du point O tirez à liberté une ligne OS, qui coupe la ligne AB donnée au point S, pour avoir l'angle *g*, entre les côtés duquel & du point S vous décrirez l'arc OM, d'un rayon pris à discrétion. Et, comme vous êtes prévenu que les angles alternes internes doivent être égaux, de l'autre côté de la ligne OS faites sur cette ligne au point O l'angle

(*a*) *Théorie.* C'est la connoissance des raisons par lesquelles on établit une vérité. Pour donner une bonne Théorie des paralléles, peu importe que ces lignes soient construites avec précision. On part de la supposition qu'il y ait des paralléles. De la premiére idée, que l'on s'en forme, on essaye de déduire toutes les propriétés que l'on peut découvrir. Le sublime de la Théorie consiste à devancer l'expérience, à la guider, à la perfectionner. Mais avec les enfans, quand on aura démontré une propriété, on la confirmera toujours par l'expérience; on leur fera mesurer avec le compas les angles alternes internes, afin qu'ils voyent s'ils sont effectivement égaux. On essayera de même si la somme des arcs, qui mesurent deux angles internes ou extérieurs pris du même côté de la secante, est égale à une demi-circonférence qui a même rayon que ces arcs; comme ils trouveront que cela est, ils auront une preuve, tirée de l'expérience, que la somme de ces angles est toujours égale à deux angles droits.

a égal à l'angle g, en prenant l'arc SN égal à l'arc MO, & par les points N, O tirez la ligne CD, elle sera paralléle à la ligne AB.

DEMONSTRATION.

Par la construction, les angles alternes internes sont égaux : donc les lignes AB, CD sont paralléles (n°. 50.).

On remarquera que la résolution de ce problême est fondée sur la converse de la proposition 3 (n°. 50.).

PROBLEME XIX.

62. Tracer des paralléles sur le terrein (fig. 56.).

RESOLUTION.

On commencera par tracer une des paralléles CD. Après quoi on conviendra de la largeur ou de la distance qui doit régner entre ces paralléles. Supposons que d'un point quelconque S de la ligne CD on ait élevé avec l'équerre d'Arpenteur la perpendiculaire SO (n°. 32.) d'une longueur convenue ; ce qui déterminera la véritable distance que l'on veut mettre entre ces paralléles. Au point O élevez la perpendiculaire BOM ; elle sera nécessairement paralléle à CD.

DEMONSTRATION.

Car deux lignes CD, BOM, perpendiculaires sur une troisiéme ligne OS, sont paralléles entre elles (n°. 54.).

Il est fort commode de sçavoir diviser une ligne

droite en autant de parties égales qu'il est nécessaire. Cette opération peut se faire avec une grande facilité par le moyen des paralléles (fig. 58.).

PROBLEME XX.

63. Diviser une ligne droite AB en autant de parties égales qu'on le demande.

RESOLUTION.

Supposons que ce soit en six parties égales. Par l'extrémité B de la ligne AB tirez la ligne indéfinie BD, sur laquelle vous n'avez qu'à porter six fois une même ouverture de compas à discrétion. Après cela vous tracerez AD. & par les points de division 5, 4, 3, 2, 1 vous tirerez les lignes 5 C, 4 M, 3 N, 2 O, 1 P paralléles à la ligne AD ; ces lignes diviseront AB en six parties égales.

Cela est assez évident ; car la ligne AB traversant des paralléles, qui sont (par la construction) à égale distance, parcourra entre elles des espaces égaux ; ainsi AC = CM = &c. (*a*).

Mais pour abréger cette opération, il suffira de tirer la ligne 5 C paralléle à AD, & la ligne AC sera la sixiéme partie de AB. En portant donc cette longueur AC six fois sur AB, elle se trouvera divisée en six parties égales.

64. Jusques à présent nous avons supposé que les deux lignes AB, CD, combinées avec une troisiéme ligne EF, n'étoient pas disposées à se rencontrer. Mais ces lignes peuvent être inclinées l'une

(*a*) Il me semble qu'il n'est pas besoin d'une démonstration plus rigoureuse pour les enfans, principalement à l'égard d'une opération aussi sensible. On consultera le Chapitre des lignes proportionnelles, si l'on n'est pas satisfait de ce que nous disons ici.

à l'autre. AB peut devenir SO (fig. 59.), c'est-à-dire, couper CD perpendiculairement ou obliquement. Considérons ces lignes dans ce dernier état. Un nouveau point de vue nous menera à des découvertes nouvelles.

Quoique AB soit devenue SO, laissons pourtant la trace de son parallélisme, c'est sur lui que nous allons fonder la certitude & l'évidence des vérités suivantes.

Les trois lignes EF, FO, OE par leur nouvelle disposition forment la figure EFO, qui a trois côtés & trois angles, d'où lui est venu le nom de *triangle*. L'angle *d* est dit *extérieur à ce triangle*. C'est cet angle extérieur *d* qu'il nous importe de considérer.

PROPOSITION VIII.

65. L'angle *d*, extérieur au triangle EFO, & formé par le prolongement OD du côté FO, vaut toujours la somme des deux angles *b*, *g* intérieurs opposés de ce triangle.

Il faut prouver que $d = b + g$ (fig. 59.).

Nous avons déja dit que la ligne SO pouvoit être perpendiculaire ou oblique à la ligne CD. Supposons d'abord qu'elle soit perpendiculaire, & rappellons-nous la proposition 7. n°. 56.

DEMONSTRATION.

Suivant la proposition 7. (n°. 56.) EO étant perpendiculaire sur l'une des paralléles CD, l'est aussi sur AB; par conséquent l'angle *d*, qui est droit, vaut la somme des angles *a*, *g* qui composent ensemble un angle droit : on a donc $d = a + g$; mais $a = b$ son alterne (n°. 50.), ainsi $d = b + g$.

2°. Si SO est oblique sur CD (fig. 60.), du point E décrivez une demi-circonférence. On aura (n°. 53.) $d + c = 2r = a + g + c$. Ainsi $d + c = a + g + c$. Otant c de part & d'autre, il reste $d = a + g$. Mais $a = b$ son alterne, ainsi $d = b + g$. Il est donc généralement vrai que l'angle d, extérieur à un triangle EFO, est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés b, g (a).

COROLLAIRE.

D'où il suit évidemment que l'angle extérieur d est nécessairement plus grand que l'un des deux angles b, g intérieurs opposés.

REMARQUE.

Pour sçavoir dans tous les cas à quels angles intérieurs l'angle extérieur d est égal ; on ne fera point attention à son angle de suite f : ainsi les deux autres angles du triangle entreront nécessairement en comparaison.

66. La converse de la proposition 8 est fausse ; car il n'est pas vrai qu'un angle, extérieur à un triangle, quoiqu'égal à la somme des deux angles intérieurs opposés, soit nécessairement formé par le prolongement d'un côté de ce triangle (fig. 61.).

(a) On a bien des mesures à prendre contre les Lecteurs de mauvaise humeur. pourquoi, diront-ils, démontrer à deux fois ce que l'on peut faire voir d'un seul coup ? Nous avons plus d'un objet en écrivant. Nous ne composons pas sur la Géométrie, pour ne donner que des germes de vérités ; elles ne trouveroient pas assez de fonds dans les esprits auxquelles nous les destinons. Telle est la nature de l'esprit humain, il ne peut s'élever aux généralités qu'en passant par les détails. D'un autre côté si nous n'avions pas considéré la proposition 8 dans deux cas differens, la proposition 7 lui devenoit totalement inutile, & l'enchaînement des vérités étoit rompu.

DEMONSTRATION.

Faites au point O l'angle N O M $=$ l'angle $d = b + g$; ainsi N O M $= b + g$. Mais l'angle M O N n'est formé par le prolongement d'aucun côté du triangle E F O, il est pourtant égal à la somme des deux angles intérieurs opposés b, g (construction). Ainsi de ce qu'un angle extérieur à un triangle vaut la somme des deux angles intérieurs opposés, on n'en sçauroit conclure absolument que cet angle soit formé par le prolongement d'un côté du triangle (a).

PROPOSITION IX.

67. Les trois angles a, b, c d'un triangle quelconque E F O pris ensemble, valent précisément la sommme de deux angles droits (fig. 62.).

Il s'agit de démontrer que $a + b + c = 2r$.

DEMONSTRATION.

Prolongez indéfiniment un côté quelconque F O vers D. Par la proposition 8 (n°. 65.) l'angle extérieur $d = a + b$. Ajoutant c de part & d'autre, on aura $d + c = a + b + c$. Mais (n°. 42.) $d + c = 2r$. Par conséquent $a + b + c = 2r$.

(a) On me dira peut-être que cette proposition convertie autrement pourroit être vraye. Je ne le nie pas; mais alors on n'auroit pas la véritable converse de cette proposition. Il n'est pas libre de convertir comme on veut. Quand on énonce une proposition, dès-là sa converse est déterminée. Pour l'avoir, il faut supposer la conclusion vraye, & voir si on en peut déduire le principe. Il n'y a point d'autre maniére de convertir véritablement une proposition. Or c'est ce que nous avons fait ici; par conséquent ceux qui se conduiront autrement pourront donner une nouvelle proposition, mais non pas une converse.

c'est-à-dire, que les trois angles d'un triangle valent la somme de deux angles droits (*a*). C. Q. E. D.

Il est très-essentiel de remarquer cette proposition. Les vérités les plus importantes de la Géométrie remontent à celle-ci, & l'on résout par son moyen des problêmes très-curieux & très-utiles.

Cette proposition n'a point de converse. Nous dirons ailleurs (n°. 76. note *a*) pourquoi certaines propositions ont des converses, pourquoi d'autres n'en ont pas, ce qu'on doit faire pour découvrir les converses qui sont vrayes, & celles qui sont fausses.

68. Une Place de guerre est ordinairement environnée de *Bastions*. Un Bastion est une partie du Rempart d'une Place. Vu de la campagne il ressemble à la figure ABCDE (fig. 63.).

Les lignes AB, ED sont les *flancs* du Bastion. BC, CD en sont les *faces*. L'angle BCD s'appelle *l'angle flanqué*. L'expérience a appris qu'un angle flanqué BCD, au-dessous de soixante degrés, oppose une résistance trop foible au canon, avec lequel on bat les faces du Bastion où l'on veut faire bréche. Mais ceux qui vont reconnoître une Place, dont on se propose de faire le siége, n'en peuvent approcher que très-dangereusement. N'y auroit-il pas moyen de connoître la grandeur de l'angle BCD, sans être exposé au feu de l'Ennemi, très-attentif à défendre l'approche de ses murailles; afin

(*a*) On fera voir aux enfans, par des figures particulières, ce que c'est qu'*être égal à deux angles droits*. On mettra, par exemple, desuite autour d'un point les trois angles d'un triangle, & on leur fera remarquer qu'ils sont réellement mesurez par une demi-circonférence, qui est la mesure de deux angles droits. On pourra encore décrire sur une ligne une demi-circonférence, avec le rayon de laquelle on décrira des arcs du sommet de chaque angle du triangle. On portera ces trois arcs successivement & de suite sur la demi-circonférence, ils la rempliront entiérement, si l'opération est éxacte. Lés enfans s'amuseront beaucoup à toutes ces petites constructions, qui leur laisseront dans la tête des idées distinctes.

de cacher aux Assiégeans les endroits foibles de la Place, par lesquels on ne manqueroit pas de l'attaquer (*a*).

PROBLEME XXI.

69. Déterminer la grandeur de l'angle inaccessible BCD (fig. 63.).

RESOLUTION.

Hors de la portée du fusil (*b*) (car les coups de canon sont trop incertains) plantez un piquet S dans l'allignement de la face BC, & un autre O dans celui de la face DC. Les trois points O, S, C sont les sommets des trois angles du triangle OCS, dont on peut connoître les angles O, S avec le Graphométre. On trouve, par éxemple, que l'angle S = 53 degrés, & l'angle O = 37 degrés. Mais puisque les trois angles du triangle OCS valent

(*a*) Tout ceci demanderoit une bonne explication. Nous nous bornerons à indiquer la conduite, que l'on doit tenir à l'égard des enfans. On leur dira ce que c'est qu'une place de guerre, quel est son objet. on leur fera une description de ce qu'il y a de plus essentiel à remarquer dans un siége, comme les lignes de circonvallation, les tranchées, les batteries, &c. ils se plairont beaucoup à entendre ces petites histoires; cela les disposera à recevoir la vérité Géométrique, à l'occasion de laquelle ils auront appris des choses si intéressantes. Je ne cesserai de le répéter, il faut sur-tout parler aux yeux. On leur tracera une esquisse des différentes opérations d'un siége. Par-là on épargnera les mots, mais on prodiguera les idées.

(*b*) La portée du fusil chargé à balle est depuis 120 jusqu'à 140 ou 150 toises. Il y a des canons qui portent 12 à 15 cens toises; mais à cétte distance il est impossible de répondre de la justesse du coup, si l'on tire sur un objet de petite étenduë; parce que le boulet, vers la fin de son mouvement, est détourné de sa direction par la pesanteur qui le pousse en bas. La portée du canon en ligne sensiblement droite n'est guéres que de 300 toises; c'est ce qu'on appelle sa portée *de but en blanc*: encore la force du recul dérange-t'elle beaucoup la justesse des coups; c'est pourquoi on ne tire pas ordinairement du canon pour un homme seul.

deux angles droits, on aura $53 + 37 + g = 180$ degrés, ou $90 + g = 180$ degrés; ainsi $g = 180 - 90 = 90$ degrés, c'est-à-dire, que l'on aura la valeur de l'angle g, en retranchant la somme des deux angles O, S de 180 degrés. Or g est opposé par le sommet à l'angle flanqué BCD; donc l'angle BCD = 90 degrés, comme l'angle g auquel il est égal (n°. 45.).

Nous ne croyons pas que l'on puisse donner une résolution plus simple d'un problême, qui paroît d'abord impossible à résoudre (*a*).

Il est rare aujourd'hui que les angles flanqués d'une place soient au-dessous de soixante degrés. On ne trouve guéres ce défaut dans nos fortifications à la moderne, à moins qu'on n'y ait été forcé par la nature ou par la situation du terrein; ainsi à ne considérer le problême 21. que du côté où nous venons de le montrer, il paroît beaucoup plus curieux qu'utile: mais la résolution de ce problême nous méne à celle d'un autre tout aussi singulier & d'un usage très-fréquent à la guerre.

(*a*) Il n'y a rien qui tienne plus du merveilleux que la résolution de semblables problémes. Ceux qui ne connoissent point les secrets ni les ressources de la Géométrie, traitent les Mathématiciens de gens à imagination, quand ils leur entendent dire qu'il y a des méthodes démontrées, pour déterminer la distance entre plusieurs objets visibles, dont il n'est pas possible d'approcher. Ils prononcent tout net que la chose est impossible. Ce n'est pas qu'ils ayent éxaminé la question; mais, comme elle n'a rapport à aucunes de leurs connoissances, ils décident qu'elle ne tient à rien du tout. Il éxiste au fonds de l'ame humaine un certain sentiment qui refuse la possibilité à tout ce qu'elle ne comprend pas. Une question, qui ne donne aucune entrée à nos perceptions, nous tourmente & nous humilie. Comment regagner cette bonne opinion de nôtre propre excellence, qui nous remet si-bien avec nous-mêmes? On taxe la question d'absurde, & l'on ne s'apperçoit pas que l'on ne fait que se vanger.

C'est à l'occasion de pareilles singularités que l'on fera comprendre aux enfans qu'ils ne sçauroient être trop retenus dans leurs décisions, & que l'on accoutumera les jeunes gens à éxaminer avant que de décider. Celui qui est parvenu à l'état d'un doute raisonnable s'est approché bien près des vérités les plus sublimes.

70. Lorsque l'on établit des batteries de canon, afin de battre la face CD du Bastion ABCDE (fig. 63.), on doit les disposer de maniére qu'elles fassent le plus grand effet possible. Il faut pour cela que les boulets frappent perpendiculairement la face CD. L'expérience apprend assez qu'un coup donné de biais ou obliquement produit un effet beaucoup moindre que celui qui porte directement (*a*). On établit quelquefois des batteries à 300 toises de la face CD. Une distance aussi considérable ne permet pas de juger à la vue de la véritable direction des coups. La Géométrie fournit des expédiens admirables. Nous allons l'éprouver sur la question présente, qui tirera sa résolution du problême suivant.

PROBLEME XXII.

71. Tirer une paralléle à la face inaccessible CD du Bastion ABCDE (fig. 64.).

RESOLUTION.

Prolongez la face BC, & cherchez la valeur de l'angle flanqué C inaccessible (par le problême 21. n°. 69.] au point O, où l'on a déterminé la distance à laquelle doit être la paralléle cherchée, faites avec le Graphométre sur la ligne CO l'angle COS égal à l'angle flanqué C; la ligne OS sera paralléle à la face CD; puisque deux lignes, également inclinées du même côté sur une troisiéme ligne, sont paralléles (n°. 55.) (*b*).

(*a*) Cette expérience est aisée à faire. Frappez avec un bâton sur un corps incliné, vous éprouverez beaucoup moins de résistance que si vous portiez le coup perpendiculairement. La raison en est bien simple; par cette inclinaison le corps se dérobe en partie au coup,

(*b*) Etant aussi peu avancés que nous le sommes en Géométrie,

PROBLEME XXIII.

72. Disposer des batteries de maniére qu'elles produisent sur la face CD le plus grand effet possible (fig. 64.).

RESOLUTION.

Je suppose que le point O soit à une distance convenable de la face CD.

Nous ne croyons pas que l'on puisse donner une résolution plus élégante de ce problême. Celle que l'on trouve dans beaucoup de livres de Geométrie est trop difficile pour les Commençans, à qui d'ailleurs on ne dit pas un mot de l'esprit de la découverte : pourquoi & comment on y a été conduit. C'est une suite de propositions ou de théorêmes, qui ne paroissent démontrées que pour faire preuve de la sagacité de l'esprit. Ce qui est beaucoup plus capable de faire perdre courage aux Commençans que de les animer au travail.

Il nous a toujours paru qu'il valoit mieux, & qu'il étoit plus naturel d'exciter les hommes au travail par l'utilité qui peut leur en revenir ; il est donc à propos de leur faire envisager par quels progrés & à quelle occasion on a pû se porter à de pareilles recherches. On n'entendra plus faire cette question si ordinaire & si raisonnable, à quoi cela mene-t'il ?

A la vérité le pére Dechales & Ozanam, son Traducteur, son Abbréviateur & son Commentateur ont indiqué quelques usages des propositions qu'ils ont démontrées ; mais il y a beaucoup de ces usages qui supposent des connoissances dont on n'est pas prévenu. Telle proposition, disent ces Auteurs, est d'usage dans la Perspective, la Gnonomique, l'Astronomie, la Navigation ; toutes sciences inconnuës à ceux qui étudient les Elémens de la Géométrie. La pratique des Arts les plus communs & les plus familiers offre un grand nombre de cas où l'on peut appliquer la Géométrie élémentaire. Une levée de terre, un rempart, un fossé, un canon sont des objets qui se montrent de tous les côtés En faisant remarquer aux enfans que la Géométrie se retrouve par-tout, on lui fera perdre l'injuste réputation que des esprits oisifs & superficiels s'efforcent de lui donner, d'être une science isolée qui n'entre point dans le train ordinaire de la vie, tandis qu'elle brille de toutes parts aux yeux qui sçavent l'appercevoir. En un mot nous avons une Géométrie naturelle : la réflexion l'a étenduë ; les découvertes ont été réduites en méthodes infaillibles ; les ouvriers s'en sont mis en possession, & ils les éxécutent, comme nous en jouissons, souvent sans y rien comprendre.

Tirez par ce point O la ligne OS paralléle à la face inaccessible CD (problême 22.). Sur cette paralléle élevez les perpendiculaires PT ; elles marqueront les véritables directions, que l'on doit donner aux canons ; afin qu'ils battent la face CD le plus avantageusement qu'il est possible.

DEMONSTRATION.

PT étant, par la construction, perpendiculaire sur OS, le sera nécessairement sur sa paralléle CD (n°. 56.) ; par conséquent les boulets, qui suivront la direction PT, produiront sur CD le plus grand effet possible (n°. 70.) (a).

Il y a plus ; on peut, en suivant toujours la même route, découvrir la véritable longueur d'une ligne inaccessible.

PROBLEME XXIV.

73. Déterminer en toises, pieds, pouces, &c. la longueur de la ligne inaccessible AM (fig. 65.).

RESOLUTION.

On suppose qu'il soit libre de s'étendre dans la campagne.

Placez-vous à un point D, d'où regardant l'extrémité A de la ligne inaccessible AM, vous apperceviez dans le même allignement un point re-

(a) Je supplie que l'on ne me chicane pas. Je sçais bien que les faces d'un Bastion ne sont pas tout à fait perpendiculaires, ou plutôt ne s'élevent pas verticalement sur le terrein où elles sont construites, à cause de leur talud : par cette raison les boulets, qui partent de la batterie selon la disposition que nous avons prescrite, ne produisent pas à la rigueur un choc perpendiculaire aux faces : mais il s'en faut si peu que cela doit être compté pour rien.

marquable

marquable S. Il ſe formera au point A un angle x inacceſſible, dont vous trouverez la grandeur par le problème 21. (n°. 69.). Faites enſuite au point D, ſur la ligne D S, l'angle $f = x$, pour avoir la paralléle D N à la ligne inacceſſible A M (n°. 55.) Etendez-vous ſur cette paralléle D N juſqu'à un point N tel qu'en faiſant l'angle $g = f$, le côté N M rencontre préciſément l'autre extrémité M de la ligne inacceſſible A M. Après cela meſurez D N, & vous aurez la valeur de la ligne inacceſſible A M.

DEMONSTRATION.

Il n'y a rien au monde de ſi évident. Vous pouvez néanmoins conſulter le n°. 58. où l'on a fait remarquer que deux lignes, également inclinées du même côté entre des lignes paralléles, ſont néceſſairement égales. Or c'eſt préciſément la condition des lignes A M, D N; donc en meſurant l'une on a la longueur de l'autre (*a*).

Comme nous allons parler fort ſouvent de triangles, il eſt à propos d'en donner la conſtruction, lorſque les côtés de cette figure ſont donnés.

(*a*) Perſonne, que je ſçache, n'avoit encore déterminé les diſtances inacceſſibles, ſans y employer les triangles ſemblables ou la Trigonométrie; je parle ici aux perſonnes inſtruites. On ne pourroit pas à la vérité réſoudre ce problême dans tous les cas; puiſque nous ſuppoſons qu'on ait la liberté de s'étendre autant qu'il en eſt beſoin; ce qui n'arrive pas toujours: mais ce qu'il importe de conſidérer, c'eſt l'élégance de la réſolution; ce ſont les moyens ſimples que nous y avons employés. Qu'un homme avec le ſens ordinaire parvienne au bout de deux jours (il n'en faut pas davantage) à l'évidence d'une choſe qu'il a crue inacceſſible à l'eſprit humain, qu'il a même traitée d'abord d'impoſſible & d'abſurde, cela me ſemble encore plus merveilleux que la réſolution du problême. Ces inſtitutions étant principalement deſtinées à cultiver l'eſprit, on s'eſt perſuadé qu'une réſolution aiſée à comprendre, quoique d'une pratique moins ſure, étoit préférable à des réſolutions plus ſçavantes.

PROBLEME XXV.

74. Construire un triangle équilatéral, c'est-à-dire, un triangle dont les trois côtés soient égaux à la ligne donnée AB (fig. 66.).

RESOLUTION.

Sur la ligne OC = AB & de ses extrémités O, C décrivez deux arcs qui se coupent en D avec une ouverture de compas égale à la ligne OC ou AB. Tirez les lignes DO, DC. Le triangle DOC est équilatéral; puisque tous ses côtés sont égaux à la même ligne AB.

PROBLEME XXVI.

75. Construire un triangle *isoscèle*, c'est-à-dire, un triangle dont deux côtés soient égaux à la ligne donnée AB, & le troisiéme soit égal à la ligne OC (fig. 67.).

RESOLUTION.

Faites AC = OC, & des extrémités A, C avec une ouverture de compas égale à la ligne AB décrivez deux arcs qui se coupent en D. Le triangle DAC sera tel qu'on le demande; puisque ses deux côtés AD, DC sont égaux chacun à la ligne AB, & que le côté AC = OC.

PROBLEME XXVII.

76. Avec les trois lignes inégales AB, BC, CA construire un triangle *scalène*, c'est-à-dire, dont tous les côtés soient inégaux (fig. 68.).

RESOLUTION.

De l'extrémité O du côté $OD = BC$ l'une des lignes données décrivez un arc d'une ouverture de compas égale à la ligne CA, & de l'autre extrémité D décrivez un autre arc avec la ligne AB qui coupe le premier au point S. Le triangle ODS sera celui que l'on demande.

REMARQUE.

Afin que la résolution des problêmes 26 & 27 soit possible, il est nécessaire que les deux lignes, avec lesquelles on décrit les arcs, soient plus grandes prises ensemble que la ligne dont les extrémités servent du centre à ces arcs : ainsi (problême 26.) AD & DC ensemble doivent être plus grandes que AC & (problême 27.) OS avec SD doit surpasser OD, sans quoi les arcs ne pourroient pas s'entrecouper.

PROPOSITION X.

77. Les trois angles du triangle BAC (fig. 69.) pris ensemble sont égaux à la somme des trois angles de tout autre triangle DEF (fig. 70.).

Il s'agit de prouver que $A + B + C = D + E + F$.

DEMONSTRATION.

Par la proposition 9 (n°. 67.) $A + B + C = 2r$; de même $D + E + F = 2r$. Par conséquent $A + B + C = D + E + F$. C. Q. F. D.

Cette proposition n'a point de converse.

PROPOSITION XI.

78. Si les deux angles A, B du triangle ABC (fig. 69.) sont égaux, pris ensemble, aux deux angles D, E du triangle DEF (fig. 70.); l'on peut assurer que le troisiéme angle C du premier est égal au troisiéme angle F du second.

DEMONSTRATION.

On vient de voir (n°. 77.) que $A + B + C = D + E + F$, ôtant de part & d'autre les grandeurs égales, c'est-à-dire, ôtant $A + B$ d'une part, & de l'autre $D + E = A + B$, il reste $C = F$. (*a*).

(*a*) Ceux qui aiment la critique ne manqueront pas cette occasion de l'exercer; ils croiront me faire un reproche très-légitime de ce que j'ai mis en proposition des vérités qu'ils regarderont comme des Corollaires fort simples.

La nature d'un Corollaire ne consiste pas en ce qu'il exprime une vérité, qui se déduit trés-naturellement d'un principe accordé ou d'une proposition établie: il y a des Corollaires, dont la démonstration est beaucoup plus difficile que celle de certaines propositions. Afin que vous ayez un caractère bien sensible qui vous fasse distinguer une proposition d'un Corollaire, représentez-vous un sistême de propositions, que l'on cherche à établir, comme un terme principal auquel on est conduit par une grande route, d'où il part de temps à autre quelques chemins, qui ménent à des endroits particuliers où il est quelquefois utile de se transporter.

Ainsi le Corollaire est une vérité détachée de la chaîne des propositions, dont la continuité non interrompuë forme la grande route qui conduit au terme où l'on s'étoit proposé d'arriver.

On voit par cette image que toute vérité, qui fait chaîne, doit être produite sous le titre de *Proposition*, par laquelle il faut nécessairement passer, & que le *Corollaire* peut être négligé sans aucun préjudice, comme un espéce de superflu.

Ceux qui ont prétendu construire un corps de Géométrie, sans déduire, comme nous avons fait, leurs propositions immédiatement les unes des autres, peuvent mettre en Corollaire ce qu'ils appellent proposition, & en proposition ce qu'il leur plaît de nommer Corollaire: rien ne s'y oppose. Car s'ils nous disent qu'un Corol-

La converse de cette proposition est vraye, c'est-à-dire, que si l'angle C du triangle ABC est égal à l'angle F du triangle DEF, la somme A + B des deux autres angles du premier est égale à la somme D + E des deux autres angles du second. Car puisque A + B + C = D + E + F, & que C = F, en ôtant de part & d'autre ce qui est égal, on aura A + B = D + E.

PROPOSITION XII.

79. Les angles B, C du triangle isoscéle BAC, opposés aux côtés égaux AB, AC, sont aussi égaux (fig. 71.).

Du point A abbaissez la perpendiculaire AD, elle divisera le triangle BAC en deux triangles BAD, DAC. Il s'agit de prouver que l'angle B = l'angle C.

DEMONSTRATION.

Une perpendiculaire, qui a un de ses points à égale distance des extrémités de la ligne sur laquelle elle tombe, ne s'approche pas plus d'une extrémité que de l'autre pendant tout son cours : or telle

laire *est une suite ou une conséquence d'une proposition démontrée*, à l'exception des Axiômes, il n'y a rien que l'on ne doive appeller *Corollaire*; puisqu'en Géométrie les propositions, comme les Corollaires, sont des suites d'autres propositions.

Ces Ecrivains multiplient donc les mots, sans multiplier les idées, & c'est à quoi conduit ordinairement le défaut d'ordre; parce que la place de chaque chose n'étant pas déterminée, on ne sçauroit lui donner un nom qui la caractérise bien particuliérement.

Que l'on ne soit pas surpris de me voir discuter des questions qui appartiennent à la *dialectique* ou à l'art de raisonner. Je ne pouvois pas m'en dispenser dans un ouvrage où il s'agit de former la raison à l'occasion d'une science qui est en quelque sorte un raisonnement perpétuel. Ce n'est en effet qu'en pensant que l'on peut acquérir l'art de penser.

est la ligne AD, puisque (supposition) AB = AC. AD passe donc par le milieu du triangle BAC : ainsi elle coupe en deux parties égales l'angle A. On a par conséquent $o = s$, & $f = g$, parce que ces deux angles sont droits. D'où il suit que $o + f = s + g$; ainsi (prop. 11. nº. 78.) le troisiéme angle B = le troisiéme angle C. C. Q. F. D.

La converse de cette proposition est aussi très-véritable, c'est-à-dire, que si les angles B, C, du triangle BAC sont égaux, les côtés AB, AC opposés à ces angles sont aussi égaux (fig. 71.).

DEMONSTRATION.

Sur le milieu de la ligne BC élevons la perpendiculaire DA, & considérons les deux triangles ADB, ADC. On a (supposition) B = C & (construction) $f = g$; on a aussi DB = DC. Renversons présentement DC sur DB, le point C tombera en B, l'angle C sur l'angle B & g sur f ; le côté CA se couchera donc éxactement sur BA, ces deux côtés ne feront plus qu'une seule & même ligne qui rencontrera la perpendiculaire DA au seul point A, d'où il est clair que AB = AC.

Autre Démonstration.

Voulez-vous une maniére plus simple de faire sentir que AB = AC, en supposant que l'angle B = l'angle C ? Considérez que la ligne AB, à son origine B, est éloignée de la perpendiculaire AD autant que la ligne AC l'est à son origine C (construction). D'ailleurs l'inclinaison de ces lignes vers la perpendiculaire AD est la même (supposition); elles rencontreront donc la perpendiculaire AD,

au même point. En un mot AB n'est différente de AC que parce que le point B n'est pas le point C.

COROLLAIRE I.

80. Il n'est pas besoin de démontrer que le triangle équilatéral ODC (fig. 66.) a ses trois angles égaux, & que lorsque les trois angles d'un triangle sont égaux, ses côtés sont aussi égaux ; puisqu'un triangle équilatéral représente en tout sens un triangle isolcéle.

COROLLAIRE II.

81. Il suffit aussi d'avertir que les trois angles du triangle scaléne ODS (fig. 68.) sont nécessairement inégaux. Ils ne pourroient être égaux sans mettre de l'égalité dans les côtés (n°. 79.).

Réciproquement l'inégalité des angles d'un triangle en apporte à ses côtés ; car des côtés égaux produisent nécessairement des angles égaux. Ce qui est contre la supposition.

COROLLAIRE III.

82. On voit encore très-clairement que dans un triangle quelconque ABC (fig. S. pl. 6.) un plus grand côté est opposé à un plus grand angle, c'est-à-dire, qu'en supposant le côté BC plus grand que le côté AC, on aura aussi nécessairement l'angle BAC plus grand que l'angle ABC opposé au côté AC plus petit que BC.

DEMONSTRATION.

Puisque BC est plus grand que AC, prenez sur

BC la partie CD égale au côté AC, & tirez AD. Le triangle CAD est isoscéle ; donc l'angle CAD est égal à l'angle CDA (n°. 79.) ; or l'angle CDA extérieur au triangle ADB est plus grand que l'angle B (n°. 65.). Donc CAD > B ; & par conséquent BAC > CAD est aussi > B.

Réciproquement dans un triangle un plus grand angle est opposé à un plus grand côté.

Soit l'angle BAC > B. Il s'agit de prouver que le côté BC > AC.

DEMONSTRATION.

Comme on suppose l'angle BAC plus grand que l'angle B, on pourra prendre sur l'angle BAC la partie BAD égale à l'angle B ; ainsi le triangle BDA est isoscéle, c'est-à-dire, (par la converse du n°. 79.) que le côté AD est égal au côté BD ; donc BD + DC = AD + DC ; or AD + DC > AC ; donc aussi BD + DC ou BC > AC. C. Q. F. D.

Il est quelquefois très-important à la guerre de marcher à l'ennemi quoiqu'il soit défendu par une riviére ou un fleuve, dont il occupe une des rives, où sur laquelle il peut se porter en très-peu de temps pour s'opposer au passage du fleuve. Quand on ne trouve pas des gués favorables, il faut jetter des ponts. La célérité de l'éxécution éxige qu'on n'y employe pas plus de matériaux qu'il n'est besoin. Ce seroit une estime bien aisée à faire, si l'on sçavoit la largeur de la riviere à l'endroit où l'on veut passer ; mais l'ennemi, qui occupe l'autre rive, comme nous l'avons supposé, rend la traverse bien dangereuse. Le plus sûr parti seroit de déterminer cette largeur de dessus la rive, dont on est le maître. La Géométrie va nous tirer d'embarras.

PROBLEME XXVIII.

83. De deſſus la rive CND déterminer la largeur du fleuve RR au point P (fig. 72.).

RESOLUTION.

Tracez ſur la rive CND où vous êtes la ligne PT indéfinie, & à peu près paralléle au cours du fleuve. Faites avec le Graphométre un angle droit x ſur cette ligne au point P, & remarquez ſur l'autre rive un point H qui ſoit dans l'allignement de votre alidade. Eloignez-vous enſuite du point P ſur la ligne indéfinie PT juſqu'à un point S ou poſant le Graphométre, dont l'alidade doit marquer 45^d, vous puiſſiez appercevoir le point H dans la direction de l'alidade, tandis que le diamétre de l'inſtrument eſt alligné au point P. Je dis qu'alors, en meſurant PS, on aura la longueur de PH, d'où retranchant Py, il reſtera yH pour la largeur de la riviere. Il s'agit de prouver qu'en conſéquence de l'opération PS = PH.

DEMONSTRATION.

Puiſque les trois angles du triangle PSH = 180^d. valeur de deux angles droits (n°. 67.) que d'ailleurs (conſtruction) $x = 90^d$ & $s = 45^d$, l'angle H ſera néceſſairement de 45^d. Ainſi l'angle H = l'angle S ; mais, ſuivant la converſe de la propoſition 12 (n°. 79.) lorſque les angles d'un triangle ſont égaux, les côtés qui leur ſont oppoſés ſont auſſi égaux. Par conſéquent PS = PH, puiſque ces côtés ſont oppoſés à des angles égaux (a).

(a) Si l'on ne tombe pas d'abord au point S où le rayon SH

Sans chercher l'angle de 45^{d}. qui oblige à tâtonner, on peut résoudre ce problême de la maniére suivante.

Autre Résolution du Problême 28. (*fig.* 73.).

Prenez un point P commode, & tracez, comme ci-devant, la ligne PS indéfinie, sur laquelle au point P vous formerez l'angle droit *x*, & vous ferez planter des piquets sur le prolongement de HP du côté de V indéfiniment. Marchez ensuite sur la ligne PS jusqu'à un point arbitraire T, ou vous prendrez avec un Graphométre la valeur de l'angle HTP; & à ce même point T vous ferez l'angle PTM = l'angle HTP, dont vous prolongerez le côté TM jusqu'à ce qu'il coupe la ligne PV au point M. Mesurez PM vous aurez la valeur de PH.

Il s'agit de démontrer que l'opération donne PH = PM.

DEMONSTRATION.

Figurez-vous que PT soit une charniére sur laquelle on fasse tourner le triangle PTH. Il est clair que l'angle *x* s'ajustera parfaitement avec l'angle *o*, puisque (construction) ces deux angles sont droits. L'angle HTP produira le même effet sur l'angle PTM = HTP. Dans cette situation HT ne sera pas différente de TM, ni HP de PM; par conséquent le point H se confondra avec le point M. Ce qui donnera PH = PM, ainsi qu'on le demandoit.

fasse un angle de 45^{d}. avec la ligne PS, on s'éloignera ou l'on se rapprochera du point P autant qu'il en sera besoin.

Quoiqu'il y ait bien d'autres moyens de connoître cette largeur, je propose celui-ci à cause de la grande facilité de sa démonstration.

Mais, sans tant d'échafaudage, considérez que l'on a fait d'un côté sur P T précisément les mêmes opérations que l'on a éxécutées de l'autre côté de cette ligne : ainsi les parties, qui ont une même disposition, doivent être égales (*a*).

(*a*) On dit que l'on démontre une vérité *par le principe de la superposition*; lorsque l'on ajuste les unes sur les autres des parties supposées égales de part & d'autre, afin d'en conclure une égalité parfaite entre celles qui sont l'objet d'une proposition, dont on veut établir la certitude ou l'évidence.

Le fameux M. Arnauld, le premier en France qui ait débrouillé la Géométrie élémentaire, où il a laissé encore beaucoup de désordre, s'est élevé fortement contre le principe de la superposition; il dit (liv. 5. pag. 140. 141.) que *c'est une preuve grossiére & matérielle, & que cela est bon pour ceux qui aiment mieux se servir de leur imagination que de leur intelligence,*

Dèveloppons la nature de la démonstration. *Ce n'est autre chose qu'un raisonnement qui fait appercevoir qu'une vérité inconnuë d'abord est nécessairement liée avec certains principes si clairs & si palpables que les esprits les plus grossiers en sont pénétrés de lumière.* D'un autre côté il est d'une expérience constante qu'une démonstration frappe ou éclaire l'esprit d'autant plus qu'elle fait valoir les moyens qui nous servent naturellement & sans aucune réfléxion à nous convaincre d'une vérité. Or l'unique moyen, celui auquel la nature nous pousse, quand nous voulons juger de l'égalité que l'on assure être entre deux grandeurs, c'est de les appliquer l'une à l'autre; afin de voir si leurs extrémités se confondent bien éxactement. Ceux même, qui ont un peu étudié l'origine de nos idées Géométriques, s'appercevront facilement que l'idée d'égalité nous est venue de cette expérience. Il faut bien que les idées des corps, que les idées de la matière soient *des idées grossiéres & matérielles*, & que *l'on se serve de son imagination* pour les objets qui sont uniquement de son ressort.

Quand on assure que deux hommes, qui ont chacun une toise, sont d'égale grandeur; la preuve est certainement matérielle, selon M. Arnauld; puisque nous n'appercevons les grandeurs que par l'imagination. Cependant on ne conteste pas l'évidence de cette proposition : ainsi M. Arnauld ne paroît pas fondé à récuser une démonstration; parce qu'elle employe des moyens grossiers & matériels, comme il s'exprime.

Mais allons plus loin. Montrons bien positivement le paralogisme de ce célébre Ecrivain, & ce qui a pû lui faire illusion. Si quelqu'un assuroit, sans autre préliminaire, que deux quantités sont égales, & que, pour en démontrer l'égalité, il posât l'une sur l'autre, la preuve seroit purement méchanique, elle est grossière & matérielle, aux termes de M. Arnauld : il n'y a là aucun raisonnement.

Mais quand, pour démontrer cette proposition *deux angles égaux, dont les côtés sont aussi égaux, chacun à chacun, ont nécessairement des bases*

COROLLAIRE.

85. On voit, par la démonstration de ce problême, que deux triangles qui ont un côté égal ou commun, & sur ce côté deux angles, égaux chacun à chacun, on voit, dis-je, que ces deux triangles ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun; c'est-à-dire, que les côtés, opposés aux angles égaux, sont égaux : ce qu'il est très-essentiel de retenir.

86. Le terrein pourroit se refuser à la construction du triangle P T M. En ce cas, après avoir pris la valeur de l'angle H T P, on mesurera la ligne P T, dont on écrira la mesure aussi-bien que la valeur de l'angle H T P; afin de s'en ressouvenir. On ira ensuite choisir un lieu propre à la construction d'un triangle égal au triangle H P T, c'est-à-dire, que l'on tracera sur un terrein libre (fig. 74.) une ligne P S = P T, sur laquelle au point P on fera un angle droit, & au point S un autre angle égal à l'angle P T H. Le point O, où se couperont les deux côtés P O, S O, déterminera la longueur de la ligne P H. Puisque les côtés de ce dernier triangle seront égaux, chacun à chacun, aux côtés du triangle H P T, dont la détermination est précisément la même. Par conséquent P O, opposé à l'angle S, sera égal à P H opposé à l'angle P T H = S. Ainsi

égales, je pose l'un de ces angles sur l'autre; afin d'en conclure que ces deux angles, se confondant en tout & ne faisant plus qu'un seul & même angle, doivent avoir nécessairement une même base; ma demonstration n'est plus mécanique : car ce n'est pas afin de juger de l'égalité de leur grandeur ni de celle de leurs côtés que je les ajuste ainsi, l'un à l'autre; puisque au contraire, je ne les ajuste ainsi que parce que je les ai supposés égaux en tout; mais je les pose de cette maniére; afin que l'on s'apperçoive d'une nouvelle égalité qui est une suite nécessaire de ma premiére supposition : or c'est-là une démonstration en forme; & c'est à quoi il paroît que M. Arnauld n'a pas pris garde.

la mesure de P O donnera la longueur de P H.

87. la ligne P H (fig. 73.) inaccessible à l'une de ses extrémités H, que nous venons de déterminer, a été supposée paralléle au plan de *l'horison* (a); mais elle pourroit être élevée sur ce plan, c'est-à-dire, poser dessus perpendiculairement comme les arbres, les clochers, les piramides, les édifices, ou s'incliner, comme les murailles & les montagnes qui ont du talud. Dans ces deux cas elle peut être accessible en partie ou totalement inaccessible. Parcourons toutes ces circonstances. Les cas particuliers, en faisant naître des difficultés nouvelles, nous feront trouver de nouvelles ressources.

PROBLEME XXIX.

88. Trouver la hauteur d'un arbre, d'un clocher ou d'une piramide P H, qui n'est accessible que par son pied P (fig. 75.).

(a) On expliquera aux enfans ce que l'on entend par *horison*. Mais je conseille de ne leur faire cette explication que dans une belle plaine. Les yeux y sont naturellement portés à considérer ce cercle apparent, qui unit le Ciel à la Terre; c'est ce que l'on appelle le cercle de *l'horison* ou simplement *l'horison*. Du point, où l'on voit régner tout autour de soi cette circonference, la Terre paroît toute platte, c'est-à-dire, uniformément étenduë. Cette apparence a été nommée le *plan de l'horison*. Quand un astre, un nuage, un vaisseau paroît sortir de dessous ce plan, on dit que l'astre est à l'horison, & qu'il est sur l'horison, quand il monte au-dessus; qu'une ligne est horisontale ou paralléle à l'horison, quand elle ne s'approche pas de ce plan d'un côté plus que de l'autre. Les bras d'une balance en équilibre sont fort propres à donner l'idée d'une ligne sensiblement horisontale.

Je supplie que l'on y fasse attention. Ce sont toutes ces circonstances qui font que les enfans prennent des choses des idées bien distinctes. Les gens attentifs n'auront garde de condamner ma maniére, qui consiste à décrire plutôt qu'à définir. Si je ne craignois une trop longue digression, je ferois voir qu'une bonne définition est ordinairement le resultat d'une longue expérience & d'une combinaison très-fine d'idées fort profondes, ce qui est fort au-dessus de la portée des enfans & même de la plûpart des hommes; au lieu qu'une description ressemble à un Tableau qui ne demande que des yeux; mais j'y pourrai revenir ailleurs.

RESOLUTION.

Il est aisé de remarquer que toutes les plantes croissent perpendiculairement à l'horison, c'est-à-dire, qu'elles prennent une disposition semblable à celle d'un fil tendu par un plomb attaché à l'une de ses extrémités.

La nature apparemment a envisagé cette direction; parce qu'elle donne aux corps élevés l'assiéte la plus solide. L'expérience est constante là-dessus. Aussi les hommes se sont-ils conformés à cet avis de la nature dans la construction de leurs édifices. Ils ne donnent de la pente ou du talud aux piéces extérieures, qui les revétent, que pour contrebalancer l'effort des parties qui tendent perpétuellement à s'affaisser. On peut s'en convaincre en élevant à plomb un rempart de terre. Les parties extérieures de ce rempart s'ébouleront en très-peu de temps, non-seulement à cause de la poussée des terres nouvellement remuées qui n'ont pas fait corps; mais encore par l'action continuelle de l'air, du vent & de la pluye qui concourent sans cesse à les dégrader (a).

Puis donc que la piramide PH est perpendiculaire

(a) Ceux qui enseignent la Géométrie doivent sans doute la prendre pour base de leurs leçons; ils ne sçauroient pourtant s'y borner, sans encourir le reproche d'oublier l'enchainement que les différentes sciences ont entre elles. On l'a dit, il y a fort long-temps, & cela est très-vrai, que pour bien sçavoir une chose, il falloit en sçavoir mille. Faites intervenir, si vous le pouvez, toute la nature. Montrez-là sous les aspects & par les côtés où il est facile de la saisir. Des observations physiques, faites à l'occasion d'une démonstration ou d'une verité Géométrique, font voir ce qui a déterminé les hommes à la recherche de cette vérité; & c'est la produire au grand jour l'esprit d'invention. Une tête remplie d'idées est encore peu de chose en comparaison de celle qui posséde l'art d'en acquérir.

à l'horison, l'angle HPS, qu'elle fait avec ce plan, est un angle droit ; éloignez-vous donc du pied de cette piramide sur la ligne horisontale PS jusqu'à un point S où l'angle PSH soit de 45^d, alors l'angle SHP sera aussi de 45^d, & par conséquent PS = PH (n°. 79.) mesurez donc PS qui est sur le terrein, vous aurez la hauteur PH.

DEMONSTRATION.

Elle est précisément la même que celle du problême 28. n°. 83. dont la construction ne différe de celui-ci qu'en ce qu'il y faut prendre l'angle droit ; aulieu qu'ici il est donné par la nature de la question.

Ceux qui ne s'accommoderont pas du tâtonnement auquel l'angle de 45^d expose presque toujours, n'auront qu'à procéder, comme nous l'avons enseigné. n°. 84. & 86.

On a fait observer que les murs ou les remparts, que l'on éléve sur le terrein, ont ordinairement du talud ; ce qui fait incliner leurs faces extérieures, ainsi qu'on peut le remarquer à la ligne PH (fig. 76.) : alors la véritable hauteur du point H au-dessus de l'horisontale SP n'est pas toute la longueur PH ; c'est la perpendiculaire HD qui tombe du point H sur le prolongement PD de l'horisontale SP ; parce qu'elle est le plus court chemin du point H à la ligne SD.

PROBLEME XXX.

89. Déterminer la longueur d'une ligne PH inclinée à l'horison, & accessible par son extrémité inférieure P (fig. 76.).

RESOLUTION.

Eloignez-vous de l'extrémité P sur l'horisontale P T jusqu'en un point S, d'où appercevant le point supérieur H vous trouviez que l'angle H S P ait entre 40 & 50 degrés. Ecrivez la mesure de cet angle. Eloignez-vous encore sur l'horisontale P T jusqu'en un autre point T à 30 ou 40 toises du point S, selon que vous le jugerez à propos ; mesurez l'angle H T P, & toisez les lignes T S, S P. Cela fait, si le terrein ne vous permet pas de construire sur l'horisontale P T des triangles, dont tous les côtés soient égaux, chacun à chacun, aux côtés des triangles H T S, H S P que l'œil a tracés en l'air, vous choisirez un lieu commode où vous établirez une base égale à la ligne T S P, & divisée, comme elle, en deux parties égales aux lignes T S, S P. Au point S vous ferez l'angle P S L égal à l'angle H S P, & l'on plantera des piquets sur le côté S L. On fera aussi au point T l'angle P T L égal à l'angle HTP ci-devant trouvé, & l'on prolongera le côté T L jusqu'à ce qu'il coupe S L en un point L, dont la distance au point P mesurée fera connoître la longueur de la ligne P H inclinée à l'horison. Ce qui est assez évident ; puisque les triangles L P S, L S T sont déterminés sur la ligne P T précisément de la même maniére que les triangles H P S, H S T le sont sur la même ligne ou sur une ligne égale : ainsi les lignes, qui ont une position semblable, sont égales.

Après avoir donné la maniére de connoître la longueur des corps élevés perpendiculairement ou obliquement & accessibles à l'une de leurs extrémités, il ne nous reste plus qu'à faire voir comment l'on peut déterminer la hauteur des élévations

tions totalement inaccessibles perpendiculaires ou inclinées ; car pour les lignes horisontales inaccessibles, nous avons proposé & démontré un moyen très-simple de les trouver (probl. 24. n°. 73.).

PROBLEME XXXI.

90. Trouver la hauteur de l'élévation P S inaccessible (fig. 77.).

RESOLUTION.

Choisissez un point C d'où vous puissiez appercevoir le sommet & le pied de l'élévation P S. Faites planter des piquets sur le prolongement de S C vers A, sur lequel je suppose que l'on puisse s'étendre, & mesurez l'angle P C A, que vous écrirez. Allez ensuite à un point A du prolongement C A, qui soit raisonnablement éloigné du point C, où vous prendrez la valeur de l'angle C A P. Faites donc au point A de la ligne C A l'angle C A M = P C A, & à son point C l'angle A C M = C A P, alors le triangle C A M aura tous ses côtés égaux à ceux du triangle A C P, chacun à chacun ; ainsi le sommet M de l'un sera éloigné de la base C A autant précisément que le sommet P l'est de la même base ; abbaissant donc la perpendiculaire M N, que vous toiserez, elle sera la valeur de l'élévation P S. Ce qui n'a pas besoin de démonstration, après tout ce que nous avons dit (*a*).

(*a*) Pour bien reconnoître les côtés égaux dans la derniére figure & dans toutes celles qui sont construites à une fin semblable, on observera que les côtés opposés à des angles égaux, sont égaux ; ainsi, comme l'angle A C M = C A P, le côté A M = le côté C P. Cette marque est infaillible ; on ne sçauroit s'y tromper.

91. Il peut arriver que le terrein ne permette pas que l'on construise le triangle CAM sur la base CA. En ce cas l'opération sera plus longue. Il faudra mesurer CA, dont on écrira la valeur, comme on a fait celles des angles ACP, PAC. Après cela on ira choisir un lieu commode à la construction d'un triangle, dont tous les côtés soient égaux, chacun à chacun, aux côtés du triangle ACP, c'est-à-dire, que l'on tracera sur un terrein libre la ligne AB = AC (fig. 78.), sur les extrémités de laquelle on fera l'angle BAD = CAP, & l'angle ABD = ACP; ce qui donnera le triangle ABD, qui aura les mêmes côtés que le triangle ACP; par conséquent la perpendiculaire DG sera égale à la perpendiculaire PS. Mesurez donc DG, vous aurez PS. C. Q. F. T.

PROBLEME XXXII.

92. Trouver la longueur de la ligne inaccessible AB inclinée à l'horison (fig. 79.).

RESOLUTION.

Supposons que du point C de l'horisontale DC on apperçoive le haut & le bas de la ligne AB. On mesurera l'angle BCA, que l'on trouvera, par exemple, de 39 degrés. L'on s'écartera ensuite sur l'horisontale CD jusqu'à un point tel que l'angle BDC soit égal à la moitié de l'angle BCA. Alors, comme l'angle BCA, extérieur au triangle BCD, est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés (n°. 65.) on a BCA = BDC + CBD; mais on vient de prendre BDC égal à la moitié de BCA; par conséquent CBD sera égal à l'autre moitié; ainsi CD = CB (n°. 80.).

Faisant présentement sur DC au point C l'angle DCS = BCA, on marchera sur la ligne CS jusqu'à un point S où l'angle CSA soit égal à la moitié de l'angle DCS. Ce qui donnera l'angle CAS égal à l'angle CSA, à cause de l'angle DCS extérieur au triangle ACS; d'où l'on aura CS = CA (n°. 80.). Enfin mesurez la distance du point S au point D, ce sera la longueur de la ligne inaccessible inclinée à l'horison.

DEMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que l'opération donne DS = AB. Considérons les deux triangles BCA, DCS. Par la construction DC = CB, & CS = CA. De plus l'angle DCS = BCA; mais deux triangles, qui ont ces conditions, ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun; ainsi DS = AB. C. Q. F. D. (*a*).

(*a*) Voilà les plus beaux, c'est-à-dire, les plus difficiles problèmes de la *Longimétrie* (*b*) résolus par le moyen d'une Géométrie qu'un esprit même ordinaire peut entendre en moins de huit jours : c'est ce que nous avons éprouvé plusieurs fois, & de quoi nous nous engageons de convaincre tous ceux qui seroient tentés de nous accuser de témérité. Nous n'ignorons pas qu'il y a bien d'autres méthodes de résoudre ces problêmes, dont l'éxécution plus expéditive expose à beaucoup moins d'erreurs, toujours inévitables dans la pratique; mais aussi ces méthodes sont fondées sur une Théorie plus élevée, à laquelle les enfans ne sçauroient atteindre.

Quand nous formâmes le projet de composer une Géométrie a la portée des enfans ou plutôt à l'usage de tout le monde (car tout le monde est presque enfant à l'égard des Sciences qu'il ignore) nous sentîmes la nécessité de travailler sur un plan nouveau. Il y avoit long-temps que nous avions remarqué que les Modernes conduisoient à la Géométrie par des circuits assez longs ou par des voyes peu naturelles (quoiqu'ils eussent de beaucoup abrégé & applani le chemin des Anciens) que leurs propositions étoient a la vérité démontrées, mais qu'il en falloit renouer la chaîne à chaque

(*b*) *Longimétrie*. Science où l'on apprend à mesurer les longueurs ou les distances.

93. Tous les problêmes précédens sont des problêmes utiles, il y en a de fort curieux que l'on peut résoudre sans pénétrer plus avant dans les secrets de la Géométrie. Personne n'ignore où il est aisé à tout le monde de sçavoir, en lisant la note (*a*), ce que c'est qu'un *Billard*, ce que signifie *prendre* ou *frapper une bille de bricolle*. On ne s'imagineroit pas que la Géométrie pût tracer le véritable chemin par lequel une bille va en frapper une autre, en lui faisant suivre des directions souvent opposées à celle sur laquelle elle devroit naturellement rouler. On attribue la justesse du coup à une longue pratique du Joueur; &, si l'on excepte les coups de hasard, on juge tout autre moyen absolument insuffisant. Cependant nous allons déterminer l'unique route que la bille doit tenir.

On trouve, dans la Géométrie du Pére Lami, un moyen géométrique très-simple de frapper une bille par une seule bricolle. Cet Auteur essaye de résoudre le problême, en supposant deux bricolles; & il entre là-dessus dans un calcul, qui rend sa résolution embarrassée & peu élégante. En cherchant à faire mieux, j'en ai trouvé une résolution si générale qu'elle s'étend à toutes les bricolles, & en même temps si simple qu'elle peut être conçue après huit jours de Géométrie. Comme il n'y a que quatre bandes à un Billard, nous nous bornerons à résoudre ce problême, quand on demande une, deux, trois & quatre bricolles; mais auparavant il nous

chaque instant moyennant des *lemmes* ou des propositions isolées, ce qui marque un défaut de construction, que d'ailleurs ils vous jettent dans une proposition, sans sçavoir à quel propos, & qu'enfin ils ne s'étoient pas avisés de faire servir les plus simples propriétés des lignes aux usages où nous les avons appliquées; nous avons donc pensé qu'une Géométrie, où l'on essayeroit de remplir toutes ces vues, se feroit distinguer par un caractére particulier.

(*a*) Un livre est fait pour tout le monde & pour tous les pays du monde. Ce qui est très-familier dans un endroit est fort rare

faut expoſer un principe de Phyſique ou d'expérience.

94. Une boule, miſe en mouvement dans un eſpace libre, eſt repouſſée par un corps qui lui réſiſte ; lorſqu'à la rencontre de ce corps elle ne perd pas tout ſon mouvement. L'action, par laquelle cette boule change de direction, s'appelle *réflexion*. La boule C (fig. 81.) animée d'un mouvement, qu'elle ne perd pas à la rencontre du corps impénétrable A B, eſt forcée de ſe détourner de ſa direction C D, pour ſuivre la direction D F. On a obſervé

ailleurs ou même y eſt abſolument inconnu ; il faut donc tout expliquer.

Le Billard eſt un jeu. On le joue ſur une grande table en quarré long, c'eſt-à-dire, plus longue que large, que l'on appelle auſſi Billard. Elle eſt recouverte d'un tapis, verd bien tendu & très-uni. On a un très-grand ſoin de mettre ce plan ou cette table parallélement à l'horiſon ; afin que les boules ou les billes, que l'on fait rouler deſſus, ne prennent d'autre direction que celle qu'on leur donne. Tout autour de ce plan régne un rebord orné de moulures, qui peut avoir trois ou quatre pouces de large ſur deux de hauteur. Son uſage eſt de retenir toujours les billes ſur la table. Le côté de ce rebord, qui ſe préſente aux billes, eſt revêtu de la même étoffe que la table, & il eſt extraordinairement garni de laine, de crin, en un mot de matiéres à reſſort, qui reçoivent & redonnent le mouvement ; c'eſt ce qu'on appelle *les bandes du Billard*. Elles ſervent à renvoyer les billes, qui viennent les frapper. On doit apporter beaucoup d'attention à la conſtruction de ces bandes ; afin que la réfléxion ſe faſſe réguliérement. A chaque coin de cette table & ſur le milieu de chacun des longs côtés, on a pratiqué une *blouſe* ; c'eſt un trou dans lequel chacun des Joueurs cherche à pouſſer la bille de ſon Adverſaire. Pour cet effet on ſe ſert d'un bâton ou d'une *maſſe* longue de quatre à cinq pieds ou même de plus, ſuivant la longueur du Billard. L'extrémité de ce bâton, deſtinée à toucher la bille, eſt platte & un peu plus large que le diamétre de la bille.

On dit que l'on frappe une bille de *bricole*, lorſque l'on va frapper les bandes, avant que de tomber ſur la bille que l'on veut toucher. Regardez la figure 80. BCDG eſt la table ſur laquelle on joue. Les bords intérieurs des côtés BC, CD, DG, GB ſont les bandes. Aux coins de cette table & ſur le milieu de ſes longs côtés on voit les blouſes marquées *s*. *xy* eſt le bâton ou la maſſe avec laquelle on pouſſe la bille *r*. On peut remarquer que cette maſſe s'élargit vers ſon extrémité *y* ; afin que l'on puiſſe prendre la bille avec plus de facilité.

que tout corps ainsi réfléchi gardoit inviolablement une certaine loi, que l'on a découverte. Pourvu que le corps qui frappe & celui qui renvoye n'ayent point d'inégalités sensibles ; qu'on laisse, par éxemple, tomber une boule de marbre sur une table de marbre, ou qu'un rayon de lumiére soit reçu sur une glace de miroir, la boule ou le rayon feront, en se relevant, un angle égal à celui qu'ils ont formé, en tombant sur la surface réfléchissante, c'est-à-dire, que l'angle C D A est toujours égal à l'angle F D B. C D A est l'angle *d'incidence*, & F D B celui de *réfléxion*. C'est cette propriété des corps, mis en mouvement, que les *Physiciens* (*a*)

(*a*) *Physiciens*. Ce sont des hommes qui observent les opérations de la nature, & qui en tirent des conséquences. On ne sçauroit commencer de trop bonne heure à expliquer aux enfans les propriétés des corps les plus sensibles. Il n'y a rien qui soit plus à leur portée. Le goût des expériences les saisit. Après cela ils veulent tout éprouver. C'est le plus sûr moyen de les prévenir contre ce faux esprit de systêmes Métaphysiques qui n'a régné que trop long-temps, & dont je vois que l'on a tant de peine à se défaire. Les esprits vifs & impatiens, ceux qui sont dominés par leur imagination, ont une violente disposition à donner dans cet excès. Les expériences demandent du travail & de l'application. Tout cela coûte. Il est plus facile d'imaginer.

Cependant il est très-aisé de comprendre que la nature ne doit pas aller suivant nos idées ; mais que nos idées doivent se conformer aux avis de la nature. Faut-il donc un si grand appareil pour l'interroger ? les boutiques des Artisans sont-elles inaccessibles ? Voilà où elle se montre sous toutes les formes, & qu'elle parle à tous nos sens. Les Arts & les Métiers offrent une multitude innombrable d'expériences, variées à l'infini, très-fines & très-recherchées. Les premiers besoins de la vie, l'intérêt & le luxe en sont les Auteurs. La boutique de l'Horloger, du Luttier, du Graveur, de l'Orfévre, du Lapidaire, du Menuisier ; celle du Tourneur, du Lunettier, du Miroitier, du Sculpteur ; de tous ceux qui travaillent sur les métaux ; l'attelier du Peintre & de l'Architecte, l'Amphithéâtre de l'Anatomiste & le laboratoire du Chimiste ; en un mot tous les endroits, où l'on éxerce les Arts utiles & les Arts de goût, en apprendront plus en six mois aux enfans, dont l'éducation est bien conduite, qu'ils ne feront pendant toute leur vie, en suivant la stérile méthode de leur remplir la tête de mots qu'il leur seroit souvent très-honteux de prononcer dans le commerce de la vie.

expriment, quand ils disent que *l'angle de réfléxion est toujours égal à l'angle d'incidence.*

PROBLEME XXXIII.

95. Démontrer par l'expérience que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réfléxion (fig. 82.).

RESOLUTION.

Cette expérience demande très-peu d'appareil. Placez verticalement ou à angles droits un demi-cercle sur une glace de miroir ABCD; & posez un objet G dans la direction d'un rayon quelconque MO. Allez ensuite placer votre œil L dans la direction d'un autre rayon ON, tel que l'arc PM = l'arc TN; afin que l'angle GOP d'incidence soit égal à l'angle LOT de réfléxion, vous appercevrez l'objet G au centre O. Couvrez ce centre, & allez vous remettre au point L, vous ne verrez plus l'objet G. On n'apperçoit donc l'objet G que par des rayons qui font l'angle d'incidence égal à l'angle de réfléxion. C. Q. F. D.

PROBLEME XXXIV.

96. On voudroit que la bille M frappât la bille S par une bricole prise sur la bande AB du Billard ABCD (fig. 83.).

On se renferme avec une espéce de mystére dans une chambre pour prouver la pésanteur de l'air & son ressort. L'appareil de l'expérience, les machines qui y servent, la dextérité qu'elles exigent en imposent à l'esprit, il perd son activité. Vous n'avez qu'à sortir & montrer les nuages, qui nagent dans l'air; voilà sa pésanteur prouvée. Faites remarquer un ballon qui saute, ou frappez sur une vessie pleine d'air, on voit son ressort. Je crois qu'il n'y a point de meilleur Cabinet pour l'éducation que le vaste Spectacle de la Nature. Les expériences y sont toutes faites; il n'y a qu'à les observer.

RESOLUTION.

Du point S abbaissez la perpendiculaire ST sur la bande AB. Prolongez cette perpendiculaire jusqu'en O, ensorte que TO = TS. De ce point O tendez une corde jusqu'à la bille M, ou simplement regardez de O en M, & remarquez sur le côté AB le point G, qui se trouve dans l'allignement des points O, M. Ce point G est celui où la bille M doit frapper; afin de rencontrer la bille S, en se réfléchissant.

DEMONSTRATION.

Il est clair qu'en suivant la route MGS, la bille M frappera nécessairement la bille S. Il s'agit donc de prouver que M poussée en G se réfléchira nécessairement en S.

Considérez les deux triangles GTS, GTO, ils ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun; ainsi l'angle x = l'angle y = f, son opposé par le sommet; donc $x = f$, c'est-à-dire, que l'angle f d'incidence est égal à l'angle S de réfléxion. Par conséquent la bille M poussée en G se réfléchira sur S. C. Q. F. D.

C'est ainsi que le Pére Dechales, Ozanam, le Pére Lami, &c. résolvent ce problême. Je ne sçais point si d'autres l'ont résolu, en supposant deux, trois, & même quatre bricolles. Nous avons déja dit que le Pére Lami cherche à le résoudre par deux bricolles, & que sa maniére est très-peu élégante. Ce qui nous a engagé à la recherche d'une autre méthode, prise de notre Géométrie même, qui doit avoir par conséquent toute la simplicité dont elle est capable. On en va juger.

PROBLEME XXXV.

97. On pose pour condition que la bille M aille frapper la bille S par deux bricolles prises, l'une sur la bande A B, & l'autre sur B C (fig. 84.).

RESOLUTION.

Abbaissez, comme ci-devant, la perpendiculaire M T sur A B, & S L sur B C. Faites T O = M T, L P = S L. Etendez un cordeau ou regardez de O en P; les points G, H, qui sont dans la direction des points O, P, sont les points où il faut que les bricolles se fassent; afin que M aille frapper S, suivant la condition du problême; de sorte que la seule ligne O P donne les deux poinrs G, H de réfléxion. Il suffit néanmoins de considérer le seul point G; puisque la bille M poussée en G se réfléchira nécessairement en H, d'où elle reviendra sur S.

DEMONSTRATION.

Par le problême précédent $x = f = y$; donc l'angle x d'incidence est égal à l'angle y de réfléxion; ainsi la bille M poussée en G suivra la direction G H. Au point H on a l'angle $z = b$ son opposé au sommet; mais $b = u$ (n°. 96.) donc $z = u$, c'est à-dire, que l'angle d'incidence $z = u$ angle de réfléxion; ainsi la bille allant de G en H se relévera sur S. C. Q. F. D.

PROBLEME XXXVI.

98. Il s'agit présentement de frapper la bille S

par trois bricolles prises sur les bandes AB, BC, CD. (*fig.* 85.).

RESOLUTION.

Des billes M, S abbaissez les perpendiculaires ML, SO, sur les bandes AB, DC. Faites LP = LM & OT = OS. Prolongez BC indéfiniment vers G, sur laquelle vous tirerez la perpendiculaire TG, que vous prolongerez jusqu'à ce que GH = TG; tirez enfin une ligne de H en P. Cette ligne déterminera sur la bande AB le point F où la bille M allant frapper se réfléchira en K, d'où elle se relévera en R, pour tomber sur la bille S.

DEMONSTRATION.

Si la bille M roule sur les lignes MF, FK, KR, RS, il est très-certain qu'elle frappera la bille S, suivant la condition du problême. La démonstration se réduit donc à faire voir que la bille M poussée en F ne sçauroit prendre d'autre route que la ligne anguleuse MFKRS.

Par la construction, l'angle $x = r = y$. Puis donc que l'angle d'incidence $x =$ l'angle y de réfléxion, la bille M poussée en F prendra la direction FK. Appliquez ce raisonnement aux autres points de réfléxion K, R où la construction est la même, vous aurez $z = e = b$, donc $z = b$; par conséquent du point K elle se relévera en R où vous avez encore $a = d = t$; donc $a = t$; ainsi du point R elle se réfléchira par la ligne RS où elle rencontrera S sur son chemin. C. Q. F. D.

On doit s'appercevoir que le problême a quatre bricoles n'est pas un probléme, dont la résolution doive nous couter beaucoup; aussi nous nous bor-

nerons à en donner la construction sans démonstration ; elle se présentera assez naturellement à ceux qui auront compris la résolution des trois problêmes précédens. Ceux qui enseignent prendront de-là occasion de mettre à l'épreuve la sagacité de leurs Ecoliers.

PROBLEME XXXVII.

99. Frapper la bille S par quatre bricoles (fig. 86.).

RESOLUTION.

Abbaissez les perpendiculaires S T, M O, & faites T G = S T, O P = O M. Sur la bande prolongée B C faites tomber la perpendiculaire G H, que vous continuerez jusqu'à ce que H N = G H. Du point N sur la bande AB prolongée abbaissez la perpendiculaire N V, & faites son prolongement V L = N V. Du point L en P tirez la ligne L P, elle donnera sur la bande D A le point R ou la bille M étant poussée suivra la route anguleuse R Z X Y S qui conduit à la bille S. Ce qui est fort aisé à démontrer.

100. Arrêtons-nous un peu sur la résolution de ces problêmes. Quelques considérations, dont nous allons les accompagner, ne serviront pas peu à les graver dans l'esprit, à y porter une conviction entiére & une évidence parfaite. On doit toujours avoir devant les yeux que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion ; c'est-là le principe.

Je dis donc, en reprenant la construction du problême à une bricole, qu'il est impossible à la bille M d'aller frapper la bille S, en touchant la bande A B, par un point différent du point G (fig. 87.) que si

M est poussée en I du côté de A ou de B par rapport à G, elle ne prendra pas la direction I S nécessaire à éxécuter le choc.

DEMONSTRATION.

Par la construction l'angle de réfléxion S I T = = T I O = L I B son opposé par le sommet ; mais c'est une chose qui parle aux yeux que l'angle L I B est plus petit que l'angle M I B ; par conséquent l'angle de réfléxion S I T seroit plus petit que l'angle d'incidence M I B ; la bille M dérogeroit donc à la loi de la nature que tous les corps éxécutent inviolablement (n°. 95.).

Tandis que nous y sommes, il ne sera pas inutile de faire remarquer une autre loi de la nature ; c'est que la bille M va toujours frapper la bille S par le plus court chemin, c'est-à-dire, que de tous les chemins qui conduisent de M en S par les bandes A B, B C (fig. 84.), il n'y en a point de plus court que M G H S, sur lequel M doit rouler nécessairement ; afin de frapper S par les deux bricoles prises sur les bandes A B, B C.

101. Avant que d'en venir à la démonstration, il faut être prévenu que la ligne droite O P, qui marque les points H, G de réfléxion, est égale à la ligne anguleuse S H G M que j'appellerai dans la suite *voye de réfléxion*.

DEMONSTRATION.

Puisque, (construction) S H = P H, on aura S H G = P H G, ajoutant d'une part G O & de l'autre G M = G O, on trouve P H G O = = S H G M. La voye de réfléxion S H G M est donc égale à la ligne droite P O qui marque les points de

réfléxion; & cela est généralement vrai dans tous les cas de ce problême; le nombre des bricoles n'y fait rien.

102. Cela posé, il est très-aisé de démontrer que la bille M va frapper S par le plus court chemin. Prenons le problême dans la supposition d'une bricole (fig. 87.). Il s'agit de prouver que la voye MIS, différente de la voye de réfléxion MGS, est nécessairement plus grande que cette derniére, c'est-à-dire, que MIS > MGS.

DEMONSTRATION.

Par la construction SI = OI, donc SIM = OIM: or OIM > OGM; donc aussi SIM > OGM, qui marque le point G de réfléxion: mais nous venons de voir (n°. 101.) que cette ligne OGM = SGM voye de réfléxion. Par conséquent SIM > OGM est aussi plus grand que SGM. La voye de réfléxion MGS est donc le plus court chemin qu'il y ait de M en S, lorsqu'on est obligé d'y aller de bricole sur la bande AB. C. Q. F. D.

Voilà un assez grand nombre de problêmes très-curieux résolus par la propriété du triangle isoscéle, il nous fournit encore un moyen fort simple d'élever une perpendiculaire sur l'extrémité d'une ligne, sans qu'il soit besoin de la prolonger.

PROBLEME.

103. Sur l'extrémité A d'une ligne quelconque AB élever une perpendiculaire (fig. X. pl. 8.).

RESOLUTION.

Retranchez de cette ligne une partie quelconque

A D. Avec cette partie construisez le triangle équilatéral A M D. Prolongez le côté D M jusqu'en *S*, desorte que M S = D M. Si l'on tire A S, elle sera la perpendiculaire cherchée.

DEMONSTRATION.

Puisque l'on suppose que A S est une perpendiculaire, il faut démontrer que l'angle DAS est droit ou que cet angle vaut 90 degrés.

Remarquez donc que l'angle D A S est composé des deux angles D A M, M A S ou que D A S = D A M + M A S. Or le triangle A M D étant équilatéral, tous ses angles sont égaux; ainsi chacun d'eux vaut le tiers de 180 degrés, c'est-à-dire 60 degrés; donc l'angle D A M = 60 degrés; il ne reste donc plus à démontrer que l'angle M A S = 30 degrés. Mais (par la construction) le triangle A M S est isoscéle, c'est-à-dire, que l'angle S vaut l'angle M A S. Observez à présent que l'angle A M D, extérieur au triangle A M S, vaut la somme des deux angles intérieurs opposés S, M A S (proposition 8. n°. 65.). Or nous venons de voir que l'angle A M D = 60 degrés, parce qu'il appartient à un triangle équilatéral. Donc, puisque A M D = S + M A S, & que A M D = 60 degrés, il s'ensuit que la somme des deux angles S + M A S = 60 degrés; mais ces deux angles sont égaux, ainsi chacun d'eux = 30 degrés; l'angle M A S a donc 30 degrés. Joignons-le à l'angle D A M qui en a 60; nous aurons D A M + M A S = 60 + 30 = 90 degrés = D A S; l'angle DAS est donc un angle droit, & par conséquent AS est perpendiculaire sur l'extrémité A de la ligne A B. C. Q. F. D.

Nous avons vu, par la génération du cercle,

(n°. 13.) que la mesure naturelle d'un angle étoit la portion de cercle interceptée entre ses côtés, & décrite du sommet de cet angle; que la mesure de l'angle DBC (fig. 88.), par exemple, qui a son sommet B au centre du cercle, étoit l'arc DC : mais comme il peut arriver qu'un angle ait son sommet dans la circonférence, comme l'angle DAC, on s'est appliqué à rechercher quelle portion de la circonférence du cercle étoit la mesure de l'angle DAC, & l'on a trouvé que la mesure de cet angle, prise du cercle où il est inscrit, étoit la moitié de l'arc DC qui passe entre ses côtés.

Cette connoissance est très-importante pour la résolution de plusieurs problêmes fort utiles. Nous allons considérer cette question suivant les différens cas où elle peut avoir lieu. Ils se reduisent à trois ou même à quatre, ainsi qu'on va le voir dans la proposition suivante.

PROPOSITION XIII.

104. L'angle DAC, qui a son sommet à la circonférence d'un cercle, a pour mesure la moitié de l'arc DC qui passe entre ses côtés AD, AC (fig. 88.).

Cette proposition renferme trois cas. Le centre du cercle peut se trouver sur l'un des côtés ou entre ces côtés ou au dehors.

Démonstration du premier cas où le centre B se trouve sur l'un des côtés AC. (fig. 88.).

Il s'agit de démontrer que l'angle A est mesuré par la moitié de l'arc DC ou par $\frac{DC}{2}$.

Tirez le rayon DB. Puisque AB = DB, l'an-

gle D = l'angle A (par la proposition 12. n°. 79.) mais l'angle DBC au centre est extérieur au triangle ABD. Ainsi l'angle DBC = A + D = 2 A (n°. 65.). Par conséquent $A = \frac{DBC}{2}$. Or la mesure de l'angle DBC est l'arc DC tout entier ; donc la mesure de la moitié de l'angle DBC, c'est-à-dire de l'angle A, est la moitié de l'arc DC. C. Q. F 1°. D.

Démonstration du second cas où le centre B du cercle se trouve entre les côtés de l'angle DAC (fig. 89.).

Du sommet A tirez le diamétre AN. Par ce moyen la démonstration revient à celle du premier cas ; car l'angle DAC = DAN + NAC, dont un des côtés AN passe par le centre B ; mais, par la démonstration du premier cas, la mesure de $DAN = \frac{DN}{2}$, & celle de $NAC = \frac{NC}{2}$. Par conséquent DAC a pour mesure la moitié de l'arc DN avec la moitié de l'arc NC, c'est-à-dire. la moitié de tout l'arc DNC. C. Q. F. 2°. D.

Démonstration du troisiéme cas où le centre B est placé au dehors de l'angle DAC. (fig. 90.).

Tirez, comme ci-devant, le diamétre AN (fig. 90.), vous aurez DAC = NAC — NAD ; mais, par la démonstration du premier cas, $NAC = \frac{ND}{2} + \frac{DC}{2}$, & $NAD = \frac{ND}{2}$, à cause qu'un de leurs côtés AN passe par le centre B ; ainsi DAC, qui vaut NAC — NAD, aura pour mesure $\frac{ND}{2} + \frac{DC}{2} - \frac{ND}{2}$ ou simplement $\frac{DC}{2}$.

C'est

C'est donc à dire que dans tous les cas l'angle DAC a pour sa mesure la moitié de l'arc DC, qui passe entre ses côtés.

La converse de cette proposition est vraye, c'est-à-dire, qu'un angle, qui a pour mesure la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés, a nécessairement son sommet à la circonférence du cercle, auquel cet arc appartient.

DEMONSTRATION.

Il est nécessaire que cet angle soit à la circonférence, s'il ne sçauroit être ni en-dehors, ni en-dedans; or un angle, qui est mesuré par la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés, ne peut avoir son sommet au-dehors de la circonférence ni en-dedans (fig. 91.).

1°. L'angle ABC, dont le sommet est au-dehors de la circonférence, n'a pas pour mesure la moitié de l'arc AC qui passe entre ses côtés AB, BC; car, en tirant la ligne OC, on voit que l'angle AOC, à la circonférence, est mesuré par la moitié de l'arc AC (n°. 104.); mais l'angle AOC est extérieur au triangle BOC; cet angle est donc égal à la somme des angles B, C (n°. 65.), ainsi AOC est plus grand que l'angle ABC. Par conséquent l'angle ABC ne peut pas être mesuré par la moitié de l'arc AC.

2°. L'angle ABC, dont le sommet B est en-dedans de la circonférence, n'est pas mesuré par la moitié de l'arc AC qui passe entre ses côtés (fig. 92.); car prolongeant un de ses côtés AB jusqu'à la circonférence & tirant OC, l'angle ABC extérieur au triangle BOC = les angles O, C; il est donc plus grand que l'angle O à la circonférence qui a pour mesure la moitié de l'arc AC.

Il n'est donc pas possible que l'angle ABC, qui a pour mesure la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés, soit au-dehors, ni en-dedans de la circonférence ; il est donc placé précisément dessus. C. Q. F. D. (*a*).

(*a*) Le principe de *la Réduction à l'absurde* consiste en ce que l'on fait voir qu'il y auroit une contradiction réelle ; si les choses n'étoient pas telles qu'on les énonce. Nous venons de faire usage de ce principe en demontrant la converse précédente. L'angle proposé, avons nous dit, est à la circonférence ou en-dehors ou en-dedans : mais il est impossible qu'il soit en-dedans ni en-dehors, il est donc placé nécessairement sur la circonférence.

Pourvu que l'on ait fait une énumération parfaite de toutes les positions qui peuvent convenir à cet angle ; il est évident que la démonstration est rigoureuse.

Cependant ces sortes de démonstrations ne sont pas du goût de M. Arnauld. Il avoue (pag. 268. ou 269. liv. XI.) *qu'elles peuvent convaincre l'esprit, en le mettant hors d'état de pouvoir douter qu'une chose soit ; mais il pense qu'elles ne le satisfont pas pleinement, en lui donnant toute la clarté qu'il peut raisonnablement désirer.*

Eclaircissons la pensée de M. Arnauld. Quand je vois un homme dans un endroit, cela est beaucoup plus évident pour moi que si l'on me prouvoit qu'il y est nécessairement, parce qu'il ne sçauroit être ailleurs. Il y a évidence d'une part & une simple certitude de l'autre.

Cette pensée est très-vraye au fonds. Mais c'est trop exiger de l'esprit humain que de prétendre à une évidence aussi parfaite sur tous les objets de ses spéculations. Le nombre des vérités, dont l'évidence soit entière, est fort petit. Il n'y a guéres que les premiers principes qui jouissent de ce privilége. Dès que nous commençons à nous en éloigner, la lumière de l'evidence devient moins vive. Elle s'affoiblit à mesure que nous descendons aux vérités particuliéres qui en émanent, & au bout d'une longue suite de propositions, qui s'enchaînent sans aucune interruption, on sent qu'elle s'éteint presque entiérement. Nous sommes certains seulement qu'une proposition fort eloignée de son principe est vraye, en faisant voir qu'elle est liée avec des propositions que l'on se souvient avoir été successivement demontrées ; quoique la démonstration n'en soit pas actuellement présente à l'esprit : ce qui produit bien une certitude & non pas une entiére évidence.

Mais le principe de la réduction à l'absurde produit le même effet : ainsi ce moyen nous paroît fort proportionné à la nature de l'esprit humain plus capable d'être convaincu, que d'être véritablement éclairé.

On remarque en effet que tous les hommes se rendent sans aucune replique à ce raisonnement : *il est impossible que cela ne soit pas ; donc cela est.* Par conséquent, puisque une démonstration est uniquement faite pour ceux à qui l'on parle, pourquoi ne feroit-on pas valoir un principe qui est si fort à leur portée.

Voici donc ce que je pense de ces deux maniéres de démontrer. On

C'est ici qu'il nous faut démontrer la fausseté d'une converse, dont on ne se seroit guéres douté.

Nous avons vû qu'un angle ACB au centre C d'un cercle avoit pour mesure l'arc entier AB qui passe entre ses côtés ; mais de ce qu'un angle a pour mesure l'arc entier AB qui passe entre ses côtés, peut-on en conclure que cet angle soit nécessairement au centre du cercle auquel appartient l'arc AB ? On seroit d'abord porté à le croire : Cependant, pour vous convaincre que cela n'est pas vrai, prenez un point O au-delà de l'arc AB (fig. 93.) ; tirez AO ; faites l'arc OS = l'arc AB, & tracez BS ; je dis que l'angle ADB, qui n'est pas au centre du cercle, a néanmoins pour mesure l'arc entier AB qui passe entre ses côtés DA, DB.

DEMONSTRATION.

Tirez BO, l'angle ADB est extérieur au triangle ODB, cet angle ADB est donc égal à la somme des angles AOB, SBO (n°. 65.) mais ces deux angles sont à la circonférence ; ainsi chacun d'eux est mesuré par la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés (n°. 104.). L'angle AOB est mesuré par la moitié de l'arc AB, & l'angle SBO par la moitié de l'arc SO = AB : ainsi les deux angles AOB, SBO ont ensemble pour mesure l'arc AB

doit toujours préférer celle des deux qui est la plus courte, la plus frappante, la plus proportionnée au commun des esprits naturellement inappliqués, & ennemis du travail. Une démonstration, qui prouve directement & par une voye simple qu'une chose est, doit être préférée à celle qui prouveroit la même chose d'une manière indirecte ; mais par de plus longs circuits. Au contraire, on s'attachera aux méthodes indirectes, quand on s'appercevra qu'elles convainquent plus rapidement : ce qui arrive assez souvent. Peu de gens sont capables de goûter les rafinemens d'une démonstration ; mais tous se laissent emporter à la force de la conviction. Comme il est plus facile de dompter les hommes que de les rendre justes ; il est aussi plus aisé de les convaincre que de les éclairer.

tout entier : cet arc mesure donc aussi l'angle A D B qui est égal à la somme des angles S B O, A O B : par conséquent un angle peut avoir pour mesure l'arc entier qui passe entre ses côtés, sans être placé au centre du cercle auquel cet arc appartient (*a*).

Pour peu même que l'on soit versé dans la Géométrie, on s'appercevra qu'il y a une infinité de points comme D au-dedans du cercle ou des angles placés auroient pour mesure l'arc A B qui passeroit entre leurs côtés.

On peut tirer quelques conséquences de ce qu'un angle a la circonférence a pour mesure la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés.

1°. Tous les angles à la circonférence appuyés sur le même arc sont égaux. Ainsi les trois angles A B C, A D B, A G C (fig. 94.), qui s'appuyent sur le même arc A C, sont d'égale grandeur ; puisqu'ils sont mesurés par la moitié du même arc A C.

2°. Tous les angles, dont le sommet est à la circonférence & qui s'appuyent sur les extrémités du diamétre A C, sont des angles droits (fig. 95.).

(*a*) Nous avons déja dit plus d'une fois que les propositions converses n'étoient pas aisées à démontrer. On fera donc passer aux Commençans toutes celles qui paroîtront un peu trop compliquées. Quand leur intelligence aura acquis plus de force, on y reviendra ; pour ceux qui ont dessein d'être Géométres, ils ne sçauroient faire trop d'attention à la vérité ou à la fausseté des propositions converses. Si quelques Géométres modernes y avoient un peu mieux pensé, ils n'auroient pas demandé qu'on leur accordât que toute proposition converse est véritable, ainsi que nous l'avons dit, & par-là ils n'auroient pas donné entrée au paralogisme (*b*) dans une science qui a toujours eu l'évidence en partage.

(*b*) *Le Paralogisme* est un raisonnement fondé sur de faux principes où dont les conséquences sont mal déduites. On fait encore un Paralogisme, quand on néglige de démontrer des propositions nécessaires, sur lesquelles on ne laisse pas que de s'appuyer comme si elles étoient démontrées. Il y a cette difference entre le Paralogisme & le Sophisme, c'est que le Sophisme se fait par malice ou par une subtilité captieuse, aulieu que le Paralogisme est l'effet d'une erreur, d'une ignorance, d'un défaut de lumiére ou d'application, sans aucun dessein de surprendre ceux à qui l'on parle.

Les angles ABC, ADC sont droits, ayant pour mesure la moitié de la demi-circonférence ASC, c'est-à-dire, le quart de la circonférence entiére, mesure d'un angle droit.

3°. Coupez un cercle par une corde MN qui ne passe pas par le centre; le cercle sera divisé en deux portions appellées *segmens* (fig. 96.). L'angle MON dans le petit segment est obtus; car cet angle a pour mesure la moitié de l'arc MCN plus grand que la moitié de la demi-circonférence; & l'angle MCN dans le grand segment est aigu, étant mesuré par la moitié de l'arc MON, qui est plus petit que la moitié de la demi-circonférence.

La propriété qu'a le cercle de donner toujours des angles droits, lorsque son diamétre sert de base aux angles, qui ont leur sommet à la circonférence, nous fournit un moyen fort commode d'élever une perpendiculaire sur l'extrémité A d'une ligne telle que AB (fig. 101.).

Prenez un point C à liberté, placé néanmoins de maniére qu'en y mettant la pointe d'un compas, dont l'autre branche s'étende précisément au point A, vous puissiez décrire un cercle, qui coupe la ligne AB en quelque point O. De ce point tirez le diamétre OD, & par le point D, où ce diamétre coupe la circonférence, menez AD; elle sera la perpendiculaire cherchée, puisqu'il est évident, par l'article précédent, que l'angle OAD est droit.

105. Nous aurions pû considérer tout de suite l'angle DAC (fig. 97.) formé par la corde DA & par une ligne AC qui rase le cercle & que l'on appelle *tangente*, c'est-à-dire touchante; mais il est besoin de faire précéder quelques remarques.

Tirons le rayon BA, sur l'extrémité duquel soit élevée la perpendiculaire AC; cette perpendiculaire ne touche la circonférence qu'au seul point A.

Si elle la touchoit encore en un autre point S, on auroit BA = BS; car les rayons du même cercle sont égaux, & le triangle BAS seroit isoscéle; ainsi l'angle BAS égaleroit l'angle BSA : or (construction) BAS est droit, donc BSA le seroit aussi; dans ce cas il y auroit la valeur de plus de deux angles droits dans le triangle BAS. Ce qui est impossible (n°. 67.).

Nous pouvons observer ici deux choses. 1°. Qu'une tangente ne touche la circonférence qu'en un seul point. 2°. Que cette tangente est nécessairement perpendiculaire sur le rayon BA au point A de *contingence*.

Ceci supposé, je dis encore que l'angle DAC formé par une corde DA & une tangente AC a pour mesure la moitié de l'arc DA qui passe entre ses côtés.

DEMONSTRATION.

Tirez le diamétre OA. L'angle OAC = DAC + DAO; mais (construction) OAC est un angle droit; il a donc pour mesure la moitié de la demi-circonférence, c'est-à-dire, la moitié de l'arc DA avec la moitié de l'arc DO : par conséquent DAC + DAO, pris ensemble, ont pour mesure $\frac{DA}{2} + \frac{DO}{2}$. Or DAO est mesuré par $\frac{DO}{2}$. Donc DAC a pour mesure $\frac{DA}{2}$, c'est-à-dire la moitié de l'arc DA.

106. Moyennant cette proposition on peut résoudre d'une maniére très-simple un grand nombre de problêmes fort curieux dans *l'optique* (a) & très-

(a) *L'Optique* est une science où l'on apprend de quelle maniére on apperçoit les objets. Il y a des objets qui répandent la lumiére, & qui

utiles dans la *fortification* (*b*). Par la remarque que nous avons faite à ce suiet, on a dû observer que les objets sont vûs sous des angles tantôt plus grands,

paroissent la renfermer dans leur propre sein, ce sont *des corps lumineux*. Le Soleil, les Etoiles, notre feu terrestre, &c. sont de ce nombre. Il y en a d'autres à travers lesquels la lumière passe; comme le verre, l'air, l'eau, la flamme même, &c. que l'on appelle *diaphanes* ou *transparens*. On en voit enfin d'une troisième espèce qui ne possèdent aucune lumière, & à laquelle ils ne permettent aucun passage, ce sont des *corps opaques*. Nous n'appercevons les corps lumineux que parce qu'ils envoyent dans nos yeux la lumière, dont ils paroissent pénétrés. Ces corps placés dans une espace libre se font voir de tous les côtés; ils sont donc comme le centre de filets de lumière qui s'étendent au loin tout autour de leur circonférence; c'est ce qui a fait appeller ces filets *rayons de lumière*. Les corps opaques ne se feroient jamais appercevoir, s'ils ne réfléchissoient vers nos yeux les rayons des corps lumineux, qui tombent sur leur surface. De quelques brillantes couleurs qu'ils nous paroissent revêtus, ôtez-leur toute communication avec les rayons lumineux, les voilà plongés dans les plus noires ténèbres.

Ainsi les corps, de quelque nature qu'ils soient, lancent, poussent, réfléchissent ou détournent les rayons de lumière: mais tout cela se fait selon certaines loix, qui n'ont pas échappé aux hommes attentifs. Des rayons de lumière sont des lignes, ses rayons se croisent; ils forment donc des angles, & par-là ils ressortissent à la Géométrie, instrument universel des découvertes.

On pose pour principe en Optique que les objets paroissent grands selon la grandeur de l'angle sous lequel ils sont vûs. Il est certain que la ligne AB est vüë sous l'angle ASB (fig. 98.), puisque les rayons AS, BS qui partent de ses extrémités viennent se réunir dans l'œil S où ils se croisent. L'expérience apprend aussi qu'au fonds de l'œil il se peint une image proportionnée à *l'angle de vision*: tout cela se démontre avec un œil artificiel, qui n'est pas rare chez les Artistes ou Amateurs des Arts. Ces faits curieux exposés à propos aux yeux des enfans animent leur attention, ou, pour mieux dire, entretiennent leur activité.

(*b*) *La Fortification* enseigne l'art de disposer l'enceinte d'une place de manière que ceux, qui la défendent, puissent résister aux attaques d'un ennemi supérieur en force. On peut enseigner aux enfans la pratique de la fortification presque toute entière; tirer une ligne droite, la couper en plusieurs parties égales, élever une perpendiculaire, mener des parallèles, former des angles, construire un poligone ou une figure de plusieurs côtés; avec cela on peut exécuter un grand nombre d'opérations de fortification; mais, je ne cesserai de le répéter, que l'on fasse tout cela, en parlant à leur raison. Quoique la Théorie de cette science soit assez simple, on ne sçauroit croire avec quelle négligence on l'enseigne. A en juger même par les livres modernes, qui ont paru sur cette matière, il semble que ce soit une pure routine. M. le blond, Maître de Mathématiques des Pages de la grande Ecurie, est le seul des Ecrivains qui ait saisi la vraye methode d'expo-

tantôt plus petits. Ce que l'expérience démontre d'une maniére bien sensible, lorsque l'on se trouve dans une allée ou une avenue bordée d'arbres plantés sur des lignes paralléles (fig. 99.) : les extrémités E,F de cette avenue paroîtront se rapprocher à l'œil placé en S ; parce que la distance EF, quoiqu'égale à la distance AB, est vue sous l'angle ESF plus petit que l'angle ASB, sous lequel on voit la distance AB (*a*).

ser un sistême de fortification raisonnée. Cet excellent Maître a connu la nature de l'esprit humain, qui n'étend véritablement ses connoissances qu'à proportion que sa raison est éclairée.

On montre à fortifier selon le sistême du Chevalier de Ville, du Comte de Pagan, du Maréchal de Vauban, &c. sans remonter aux raisons qui ont déterminé ces Ingénieurs célébres à suivre une route differente de celle qu'ont tenu leurs prédécesseurs. On en dit bien quelque chose en général ; mais ce ne sont point les généralités qui instruisent ; il faut entrer dans le détail & ne pas s'imaginer qu'un flanc plus ou moins couvert soit ce qui caractérise les differens sistêmes de fortification, comme on a coutume de le persuader aux jeunes gens ; question au fonds, qui est d'une assez petite conséquence. Ce qui distingue un homme d'un autre homme, un esprit d'un autre esprit, c'est la maniére d'envisager un objet par toutes ses faces ; de supprimer ou d'ajouter suivant le besoin ; de soutenir ce qui étoit déja établi ou de le détruire par de nouvelles raisons fondées sur de bonnes observations de Physique ; voilà ce qui apprend à penser. Cette ligne doit avoir tant de toises, on peut faire cet angle de tant de degrés ; que la raison suive le précepte. Rendez compte de tous les mouvemens du compas & de la régle. Les parens n'y prennent pas assez garde. Après deux ou trois mois de fortification on leur montre des plans bien lavés, bien coloriés. On se récrie sur la propreté & la symétrie du dessein ; les couleurs, avec lesquelles on en détache les differentes parties, sont étendués avec beaucoup d'art, elles ne sçauroient être mieux fondues, plus adoucies, ni plus pétillantes ; mais demandez à celui qui a construit ce plan si brillant pourquoi il a suivi telles & telles proportions, quels seroient les inconvéniens d'y déroger ? On vous répond que ce sont les véritables proportions du sistême que l'on a suivi ; que M. de Vauban s'est conduit sur ces principes ; on n'en sçait pas davantage. Toute sa science se réduit donc à sçavoir tirer des lignes & à étendre des couleurs.

(*a*) Quoique j'aye dit que des allées paroissent convergentes, à cause que les angles décroissent, ce n'est pas à dire que la grandeur apparente des objets dépende uniquement de l'angle sous lequel ils sont vûs. A la vérité tous les Opticiens conviennent que la grandeur des objets fort éloignés est proportionnelle à l'angle visuel ; ce qui suffit pour faire comprendre comment les extrémités d'une allée vûes

PROBLEME XXXVIII.

107. Un œil placé en C voit la ligne AB sous l'angle ACB, on demande que l'on trouve un point M d'où la ligne AB paroisse sous un angle une fois plus petit (fig. 100.).

RESOLUTION.

Supposons d'abord que ACB soit un triangle isoscéle dont AC = CB. Prolongez AC jusqu'en M, ou BC jusqu'en O ; ensorte que ces prolongemens soient égaux chacun à CA ou à CB ; je dis que du point O ou du point M la ligne AB paroîtra sous un angle une fois plus petit que si elle étoit vue du point C.

DEMONSTRATION.

Tirez les lignes OA, MB ; & pour une plus grande facilité du point C avec le rayon CA décrivez une circonférence. Il est clair que les angles O, M à la circonférence ne sont que la moitié de l'angle ACB au centre (n°. 104.). L'œil placé en M ou en O verra donc la ligne AB sous un angle une fois plus petit que s'il regardoit la même ligne du point C. C. Q. F. D.

108. Non-seulement la ligne AB paroîtra sous un angle une fois plus petit vue du point M ou du point O ; mais en quelque point que l'on se place sur le grand arc BMSOPRA (fig. 102.) la ligne AB paroîtra toujours sous le même angle ; puisque

de loin, paroissent se rapprocher ; mais quand les objets ne sont pas fort éloignés, il paroit que la grandeur apparente des objets suit d'autres regles.

les angles AMB, ASB, &c. sous lesquels elle sera vuë, sont égaux : ayant pour mesure la moitié du même arc AB.

109. C'est pourquoi, si la ligne AB représentoit le devant d'un Théâtre, & que les places du Spectacle fussent disposées dans la circonférence d'un cercle dont AB fût une corde, le devant du Théâtre paroîtroit à tous les Spectateurs de la même grandeur, en supposant que la grandeur apparente des objets dépende de la grandeur de l'angle, sous lequel ils sont vûs (*a*).

110. Il peut arriver que ACB ne soit pas un triangle isoscéle, c'est-à-dire, que le Spectateur en C ne soit pas également éloigné de A & de B.

Pour trouver un point M d'où la ligne AB paroisse sous un angle une fois plus petit, faites le prolongement CM = CA. Le point M est un des points où la ligne AB sera vue sous un angle une fois plus petit que si on la regardoit du point C. Tirez la ligne MA (fig. 103.).

DEMONSTRATION.

Puisque (construction) CM = CA; l'angle CMA = MAC (n°. 79.); mais l'angle ACB est extérieur par rapport au triangle MCA; cet angle

(*a*) Je fais toujours abstraction, ici comme ailleurs, du jugement de l'ame occasionné par la vûë des objets interposés; comme ce jugement peut varier suivant que les differens Spectateurs ont appris à voir, il est impossible de déterminer au juste ce qui résulte de la combinaison du principe Géométrique avec nos jugemens d'habitude sur la grandeur ou la distance des objets. Au reste on peut donner une raison Physique pourquoi un Spectateur en O, quoique plus éloigné de la corde AB que celui qui seroit placé en R, verroit néanmoins cette corde de la même grandeur. c'est que l'obliquité nous dérobe une partie des corps que nous regardons. Le Spectateur en R est à la vérité plus près de la corde AB, mais il la voit aussi plus obliquement; aulieu que du point O il la voit en face, & il regagne par cette position avantageuse ce que l'éloignement lui fait perdre.

ACB est donc égal aux deux angles CMA, MAC pris ensemble (n°. 65.), ou ce qui revient au même, l'angle ACB est double de CMA. L'angle CMA est donc une fois plus petit que l'angle ACB. Ainsi la ligne AB, vue du point M, est vue sous un angle une fois plus petit que du point C.

Si l'on donnoit à la ligne AC un prolongement égal à CB; on auroit un autre point d'où AB paroîtroit sous un angle une fois plus petit que du point C; & en faisant passer une circonférence par les trois points M, A, B, on trouvera tous les points qui satisfont à la question. Ce que je laisse à chercher aux Commençans; mais il est besoin qu'ils sçachent l'art de faire passer une circonférence par trois points, qui ne soient pas en ligne droite.

PROBLEME XXXIX.

111. Décrire une circonférence de cercle par les trois points A, B, C qui ne soient pas sur une même ligne droite (fig. 104.) (*a*).

RESOLUTION.

On voit qu'il suffit de trouver un point I qui soit à égale distance des trois points A, B, C.

Des points A, B, & d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de la distance AB, décrivez deux arcs qui se coupent aux points M, N en-dessus & en-dessous de AB, & tirez la ligne indéfinie MN, dont tous les points, par la construction, sont à égale distance de A & de B; ensuite

(*a*) Cette condition est nécessaire, puisque l'on demande un cercle. Il ne sçauroit passer par trois points en ligne droite; car il est évident qu'une ligne droite ne peut jamais couper un cercle qu'en deux points.

des points B, C décrivez deux autres arcs en-dessus & en-dessous de BC qui se coupent aux points D, P; tirez l'indéfinie DP. Son intersection avec MN donnera le point I également éloigné des trois points A, B, C. En mettant donc une des pointes du compas au point I, si on l'ouvre de la grandeur IA, la circonférence que l'on décrira avec ce rayon passera par les trois points proposés.

DEMONSTRATION.

Le point I est dans la ligne MN; il est donc éloigné de A, comme il l'est de B; il est aussi dans la ligne DP: par conséquent il n'est pas plus près de B que de C; parce que la ligne DP ayant deux points D, P à égale distance de B & de C, les a tous. Il en est ainsi de MN par rapport aux points A, B. C. Q. F. D.

PROBLEME XL.

112. Trouver un point d'où les lignes AB, CD inégales paroissent sous des angles égaux (fig. 105.).

RESOLUTION.

Faites sur l'une des deux lignes CD le triangle isoscéle CSD à liberté. Construisez aussi sur la ligne AB un triangle ABP qui ait tous les angles égaux à ceux du triangle CSD, chacun à chacun; c'est-à-dire, faites l'angle PBA = l'angle SDC, & l'angle PAB = l'angle SCD; vous aurez le triangle isoscéle APB, dont l'angle P = l'angle S du triangle isoscéle CSD (n°. 78.). Du point P avec le rayon PA décrivez un cercle, & du point S avec le rayon SC décrivez un autre cercle qui

coupe le premier aux points O, G; ces points O, G marqueront les endroits où l'œil verra les lignes A B, C D sous des angles égaux.

DEMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que l'angle A O B = l'angle C O D.

Des angles sont égaux, quand ils sont moitiés d'angles égaux. Or tels sont les angles A O B, C O D; car l'angle A O B étant à la circonférence du cercle est la moitié de l'angle P (n°. 104.). Par la même raison C O D est la moitié de l'angle S = P (par la construction) ainsi l'angle A O B = l'angle C O D; les lignes A B, C D inégales vues du point O paroîtront donc sous des angles égaux (n°. 106.) C. Q. F. D.

Un œil placé au point G d'intersection des deux cercles verroit aussi les deux lignes A B, C D de la même grandeur. Ce qui se démontre comme ci-dessus.

Il peut arriver que les cercles ne se coupent pas. En ce cas on fera plus grand le triangle isoscéle C S D, en prenant plus grand le côté C S ou D S.

113. On vient de voir que deux lignes inégales peuvent paroître sous des angles égaux, vues du même point; mais la même ligne AB (fig. 106.) vue directement du point O, paroîtra sous un angle plus grand que si elle se présentoit de biais à l'œil placé au même point O, en prenant, par éxemple, la position A D. Puisque l'angle A O B, sous lequel A B paroît, est évidemment plus grand que l'angle A O D sous lequel on voit A D = A B.

Lorsqu'un œil A (fig. 107.) regarde une Boule ou un Globe, il n'en peut appercevoir que la partie R H T renfermée entre les rayons A R, A T qui le

rasent ou qui le touchent ; tout autre point comme X est absolument caché au Spectateur par la convéxité de ce Globle (*a*). Ainsi pour déterminer ce que l'on en peut voir ; lorsque sa grandeur & sa distance à l'œil sont données ; il faut du point A où l'œil est placé tirer des tangentes au Globe proposé.

PROBLEME XLI.

114. D'un point A donné hors d'un cercle SRHT tirer deux tangentes à ce cercle (fig. 107.).

RESOLUTION.

Du point A tirez la ligne AG au centre G du cercle. Coupez cette ligne en deux parties égales au point M, & de ce point décrivez le cercle

(*a*) Il n'est point ici question de la *Réfraction*, c'est-à-dire, de la propriété qu'ont les rayons de lumière de se rompre ou de se détourner de leur direction, quand ils traversent des espaces de différente nature ; cependant l'on prendra cette occasion d'expliquer aux jeunes gens ce que c'est que *Réfraction*, comment l'on peut appercevoir par ce moyen & indépendamment du miroir, des corps qui sont absolument cachés aux yeux. L'expérience en est très-aisée. Prenez un vase CM (fig. X. pl. 10) un peu profond & qui ne soit pas transparent, tel qu'un vase de terre, de bois, &c. mettez au fonds une pièce d'argent ou un corps T facile à voir, dont la couleur se détache bien de celle du fonds où il est placé. Eloignez-vous de ce vase jusqu'à ce que les bords vous en cachent le fonds. Arrêtez-vous à l'endroit où vous commencerez à perdre de vue le corps T ; cela n'arrive que parce que le rayon TL, qui vous le feroit appercevoir, passe au-dessus de votre œil S. Faites emplir d'eau le vase CM. Le rayon TL, en se pliant ou se rompant au sortir de l'eau (ce qui s'appelle *faire Réfraction*) s'abbaissera au-dessous de sa première direction, & viendra pénétrer l'œil S par la ligne rompue TOS, qui fera appercevoir le corps T & même le fonds du vase, quoique le tout soit directement caché à l'œil. Cette expérience si simple est fort instructive ; elle sert à expliquer des effets, qui tiendroient du merveilleux, si on n'en connoissoit pas la cause ; par exemple, pourquoi le Soleil pourroit paroître se lever deux ou trois fois dans un même jour ; elle est par conséquent très-propre à corriger le penchant naturel de l'ame qui nous porte à admirer tout ce que nous ne comprenons pas.

ARGT, qui coupe la circonférence du premier aux points R, T, par lesquels tirant les lignes AR, AT, elles seront les tangentes que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Du point R d'interfection tirez le rayon RG. Si la ligne AR est tangente, elle doit être perpendiculaire sur l'extrémité R du rayon GR (n°. 105.) ou ce qui est la même chose, il est nécessaire que l'angle GRA soit un angle droit. Or il est évident que l'angle GRA est droit; car il a son sommet R à la circonférence; il a donc pour mesure la moitié de la demi-circonférence GTA, qui passe entre ses côtés GR, RA (n°. 104.); mais la moitié de la demi-circonférence = 90^{d} ou le quart de la circonférence, qui est la mesure d'un angle droit; l'angle GRA est donc un angle droit; ainsi AR est perpendiculaire sur l'extrémité du rayon GR; c'est donc une tangente (n°. 105.). Vous ferez le même raisonnement au point T; d'où vous concturez que la ligne AT est une autre tangente. C. Q. F. D.

Il arrive souvent, en recherchant les propriétés des surfaces que l'on a besoin de *circonscrire* une figure au cercle, c'est-à-dire, de disposer une figure comme ABC (fig. 108.) autour d'un cercle, de maniére que les côtés AB, BC, CA soient des tangentes. Ce qui éxige que l'on sçache tirer une tangente à un point donné sur la circonférence d'un cercle.

PROBLEME XLII.

115. Tirer une tangente au point A pris sur la circonférence du cercle (fig. 109.).

RÉSOLUTION.

Tirez le rayon CA. Au point A élevez une perpendiculaire AB sur ce rayon, elle sera tangente au point A.

DEMONSTRATION.

On a fait observer (n°. 105.) que une ligne perpendiculaire sur l'extrémité d'un rayon ne touchoit la circonférence qu'en un point ; mais c'est précisément la propriété de la ligne AB (construction) cette ligne est donc une tangente.

PROBLEME XLIII.

116. Si l'on vouloit avoir une tangente commune à deux cercles de différent diamétre. Voici comment il faudroit s'y prendre (fig. 110.).

RESOLUTION.

Joignez les centres des cercles par la ligne CD. Coupez cette ligne en deux parties égales au point M. De ce point & avec le rayon MC ou MD, décrivez la demi-circonférence COD. Prenez l'excès du rayon du grand cercle sur celui du petit. Portez cet excès de D en B sur la demi-circonférence COD, & par ce point B tirez le rayon DS, à l'extrémité duquel élevant la perpendiculaire indéfinie NSG, elle sera tangente commune aux deux cercles proposés.

DEMONSTRATION.

BD étant l'excès du grand rayon sur le petit, il

il est clair que BS = CG rayon du petit cercle. Tirez CB; l'angle CBD est un angle droit; parce que ayant son sommet à la circonférence il a pour mesure la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés BC, BD (n°. 104.); or cet arc est une demi-circonférence. CB est donc perpendiculaire sur BS; la ligne NSG est aussi perpendiculaire sur BS (par la construction); mais deux perpendiculaires sur une même ligne sont paralléles (n°. 54.) les lignes NSG, BC sont donc à égale distance l'une de l'autre pendant tout leur cours; elles sont par conséquent toujours éloignées d'une grandeur égale à BS, qui vaut le rayon CG du petit cercle; SN passe donc par l'extrémité G du rayon perpendiculaire CG, qui marque la distance du point C à la ligne NSG; cette ligne est par conséquent tangente au petit cercle. Elle est aussi tangente du grand cercle (par la construction); c'est donc une tangente commune, ainsi qu'on le demandoit.

PROBLEME XLIV.

117. Trouver une tangente qui touche deux cercles de différent diamétre, l'une en-dessus, l'autre en-dessous (fig. 111.).

RESOLUTION.

Joignez, comme ci-devant, les centres G, D par la ligne GD, que vous couperez en deux parties égales au point M, d'où vous décrirez une demi-circonférence. Après cela vous porterez le petit rayon GH de P en S; afin d'avoir la somme des rayons DP, GH dans la ligne DS, avec laquelle du centre D faites une section en A, & tirez la corde DA. Au point B, où cette corde coupe le

grand cercle, élevez la perpendiculaire BE, elle ira aussi toucher le petit cercle. J'en laisse la démonstration à ceux des Commençans qui voudront faire un très-petit essai de leurs forces. Il faut bien se souvenir que DA est la somme des rayons. C. Q. F. T.

Voyez à la note (a) quel est l'usage de ces tangentes communes.

(a) Ces Tangentes sont fort ordinaires dans l'*Optique*. Ce sont elles qui déterminent l'étendue des ombres causées par les corps opaques d'une figure ronde. Cependant de tous les Auteurs de ma connoissance qui ont donné des Elémens de Géométrie, de tous ceux même qui ont composé des Traités d'Optique, il n'y en a pas un seul qui ait pensé à décrire & à démontrer la manière de tirer une Tangente commune à deux cercles de différent diamètre. Nous avons résolu & démontré ce problême sans employer les proportions, dont nous nous sommes proposés de ne faire aucun usage dans ce premier volume de nos Institutions (b); parce qu'elles demandent une suite de raisonnemens fort au-dessus de la portée de ceux que nous avons ici en vue. On fera donc remarquer aux enfans qu'un globe lumineux tel que le Soleil S (fig. 112.) ne peut éclairer que d'un seul côté X le corps opaque D; que l'autre côté Y est absolument dans l'ombre terminée en C par les tangentes communes HC, RC, plus ou moins loin, selon que le corps S est plus grand que le corps D, ou qu'il en est plus ou moins éloigné. Que si la grandeur & la distance de ces corps sont données, ainsi que cette figure le représente, on trouvera facilement la longuer de l'ombre. L'expérience se fera pendant la nuit d'une manière très-marquée, en éloignant un flambeau d'une boule & l'approchant ensuite, on verra alternativement l'ombre croître & diminuer. On peut même à cette occasion expliquer aux enfans la cause générale d'une Eclipse, & l'on aura un très-grand soin de ne jamais employer les termes de l'Art, à moins que ceux à qui l'on parle ne soient familiarisés avec les idées attachées à ces termes, donnant toujours la définition ou la phrase au lieu du mot. J'observerai même que c'est un défaut où l'on ne tombe que trop souvent dans la conversation, lorsque l'on discoure sur des effets qui sont du ressort de quelque science. On prononce une foule de mots inintelligibles à ceux qui écoutent, qui ne sont pas obligés d'être du métier. De tout ce qui peut entrer dans les conversations ordinaires, il n'y a rien que l'on ne puisse rappeller à des idées très-sensibles, que l'on peut toujours rendre par des mots fort communs; car enfin on parle pour se faire entendre, & pour être entendu de tout le monde.

(b) C'est dans la Géométrie de l'adolescence, qui est la suite de ces Institutions, que je traite des lignes proportionnelles & des solides.

De l'Inscription & de la Circonscription des Figures.

118. La circonférence du cercle est d'un très-grand usage dans la construction des Fortifications sur le papier : en divisant cette circonférence en autant de parties égales qu'il en est besoin, & tirant les cordes que ces points déterminent, on aura les *Poligones réguliers*, sur lesquels on fera la construction nécessaire.

Un Polygone régulier est un espace, tel que la figure 113, environné d'une ligne anguleuse ABCDEF, divisée en parties égales appellées *côtés*, & dont tous les angles sont égaux. Les Poligones ont des noms particuliers qu'ils prennent du nombre des côtés dont leur circonférence, ou périmétre, est composée. Celui qui n'a que trois côtés égaux s'appelle *Triangle équilatéral*. Le *quarré* a quatre côtés égaux, & tous ses angles droits. On nomme *Pentagone* celui qui a cinq côtés égaux. L'*Exagone* en a six; l'*Eptagone* sept. L'*Octogone* huit. L'*Ennéagone* neuf. Le *Décagone* dix. L'*Endécagone* onze, & le *Dodécagone* douze, &c. Il y a encore quelques Poligones auxquels on donne des noms particuliers; nous les définirons quand l'occasion s'en présentera (*a*).

Une figure *circonscrite* est celle dont tous les côtés sont des tangentes au cercle, telle est la figure ABC (fig. 108.).

(*a*) Lorsque l'on converse il est beaucoup mieux de désigner les Poligones par le nombre de leurs côtés que de les appeller par leur nom propre, qui n'est pas assez généralement entendu. Personne n'aura de difficulté à se former l'idée d'une figure de neuf côtés égaux; mais si vous prononcez le mot *Ennéagone*, qui signifie pourtant la même chose, il faudra vous expliquer.

On dit qu'une figure est *inscrite* dans un cercle, lorsque tous les angles de cette figure ont leur sommet à la circonférence du cercle. La figure 113 précédente est une figure inscrite.

De toutes les figures réguliéres, que l'on peut inscrire ou circonscrire au cercle, l'Exagone est la plus facile. Il est donc à propos de commencer par cette figure.

PROBLEME XLV.

119. Inscrire un Exagone dans un cercle (fig. 114.).

RESOLUTION.

Portez le rayon de ce cercle six fois sur sa circonférence, il la divisera éxactement en six parties égales. Par les points de division vous n'avez qu'à tirer des cordes, elles donneront l'Exagone que l'on demande.

DEMONSTRATION.

Il faut prouver que le rayon du cercle, porté sur la circonférence, dont il devient corde, donne un arc de 60 degrés, qui est la sixiéme partie de 360 degrés valeur de la circonférence entiére. Tirez les rayons CA, CB. Le triangle CAB est équilatéral; ainsi tous ses angles sont égaux (n°. 81.) ils valent ensemble 180 dégrés ou deux angles droits (n°. 67.); chacun de ces angles aura par conséquent le tiers de 180 = 60 dégrés; donc l'angle ACB = 60 degrés; ainsi l'arc AB, qui en est la mesure, est la sixiéme partie de la circonférence, puisque six fois 60 = 360 degrés. C. Q. F. D.

120. L'angle ACB, dans tous les Poligones, s'appelle *l'angle au centre*. Sa valeur en degrés se détermine en divisant 360 par le nombre des côtés du Poligone. Ce que l'on peut voir très-facilement, en tirant des rayons à chaque angle du Poligone, il se formera au centre autant d'angles égaux que le Poligone a de côtés. Et comme tous ces angles ensemble valent 360 degrés, si l'angle au centre appartient à un Exagone ; sa valeur sera la sixiéme partie de 360 = 60 degrés.

121. L'angle ABD, formé par deux côtés voisins AB, BD, se nomme *angle du Poligone* ; il est aussi facile à déterminer que l'angle au centre. Il est évident que le rayon CB coupe cet angle en deux parties égales, ainsi l'angle ABD du Poligone = 2CBD = CBD + BDC. Or ces deux angles valent ensemble 180 degrés, moins l'angle BCD au centre (n°. 67.) ; par conséquent, quand vous aurez trouvé l'angle au centre, vous retrancherez cet angle de 180 degrés, & le reste sera la valeur de l'angle du Poligone régulier. Dans le cas d'un Exagone ôtant 60 degrés, valeur de l'angle au centre, de 180 degrés, il reste 120 degrés pour l'angle de ce Poligone.

On pourroit encore trouver cette valeur en observant que l'angle ABD (fig. 114.) du Poligone à son sommet dans la circonférence du cercle, il a donc pour mesure la moitié de l'arc DEFGA qui passe entre ses côtés AB, BD (n°. 104.), or cet arc = quatre fois 60 = 240, dont la moitié 120 est la mesure de l'angle ABD du Poligone, ainsi que nous l'avons déja vu.

122. Dans un Poligone une perpendiculaire CO abbaissée sur l'un de ses côtés AB est appellée *rayon droit* ou simplement *la perpendiculaire* & quelque fois *Apothême* : elle divise, comme on le voit,

en deux parties égales le côté AB, ſur lequel elle tombe (n°. 79.). On nomme quelquefois *rayons obliques* les lignes CA, CB, &c. tirées du centre aux angles du Poligone ; ſans doute parce que ces rayons ſont obliques au côté du Poligone.

PROBLEME XLVII.

123. Circonſcrire un Exagone à un cercle (fig. 115.).

RESOLUTION.

Commencez l'opération comme ſi vous vouliez inſcrire un Exagone, & par les points de diviſion tirez des tangentes (n°. 115.), leur rencontre déterminera l'Exagone circonſcrit.

DEMONSTRATION.

La démonſtration ſe réduit à prouver que AB = BD ; car on appliquera le même raiſonnement à tous les autres côtés. Tirez aux points de diviſion les cordes SP, PO, OM qui ſont égales par la conſtruction ; & remarquez que le triangle SAP ou PBO ou ODM eſt iſoſcéle ; car (n°. 105.) l'angle APS formé par la tangente AP & par la corde PS a pour meſure la moitié de l'arc PS ; l'angle ASP a auſſi pour meſure la moitié du même arc. Ainſi l'angle APS = ASP ; donc AS = AP (n°. 80.). En ſuivant ce même raiſonnement, vous trouverez que PB = BO. Si vous conſidérez encore que le triangle SPA a tous ſes côtés égaux aux côtés du triangle POB, chacun à chacun ; vous verrez que SA = AP = PB = BO = OD. Ainſi AP + PB = BO + OD, c'eſt-à-dire, AB = BD. C.Q.F.D.

Voulez-vous une démonstration qui ait un moindre détail & qui soit peut-être plus naturelle que la précédente ? Faites attention que l'arc SP étant égal à l'arc PO, les tangentes que l'on construira aux extrémités de l'un seront déterminées précisément de la même maniére, que les tangentes formées aux extrémités de l'autre ; d'où l'on déduira leur égalité.

Autre construction de l'Exagone circonscrit où la Démonstration pourra paroître plus simple (fig. 116.).

124. Marquez, comme auparavant, les points O, S, P de l'Exagone inscriptible. Tirez un de ces côtés OS. Sur ce côté abbaissez perpendiculairement le rayon CRH. Par le point H tirez une tangente AHB qui sera déterminée par le prolongement des rayons CO, CS. Cette tangente sera le côté de l'Exagone circonscrit au cercle. Pour avoir les autres côtés, du centre C avec le rayon CA ou CB décrivez une circonférence sur laquelle vous porterez six fois AB, & vous aurez un Exagone circonscrit au premier cercle.

DEMONSTRATION.

Il faut prouver qu'en conséquence de la construction AB = BD.

Puisque OS, & SP sont des côtés de l'Exagone inscriptible (construction) tous les angles du triangle OCS valent chacun 60 degrés ; mais (par la construction) les lignes AB, OS, étant toutes deux perpendiculaires sur la même ligne CH, sont paralléles entre elles (n°. 54.) ainsi l'angle CSO est égal à l'angle CBA (n°. 55.) le triangle CAB est donc équilatéral comme le triangle COS : ainsi AB =

═ C B rayon du cercle ponctué : par la même raison vous trouverez que B D ═ C B. Donc A B ═ ═ B D.

Je me suis beaucoup étendu sur la circonscription de l'Exagone, parce que tous les autres Poligones se circonscrivent, en suivant la même méthode : ainsi nous n'aurons point besoin doresnavant de nouvelles démonstrations, quand il s'agira de circonscrire à un cercle tout autre Poligone.

PROBLEME XLVII.

125. Sur une ligne donnée F E construire un Exagone (fig. 113.).

RESOLUTION.

Des points F, E avec la ligne proposée F E, décrivez deux arcs qui se coupent en G. De ce point & d'une ouverture de compas toujours égale à la ligne F E, décrivez un cercle, qui passera par les points F, E, sur lequel portant F E six fois, vous aurez un Exagone construit sur la ligne F E, ainsi qu'on le demandoit.

DEMONSTRATION.

Elle est claire (n°. 119.); puisque F E est égale au rayon du cercle, qui divise la circonférence en six parties égales.

PROBLEME XLVIII.

126. Faire ensorte que la ligne F E soit en même temps le côté d'un Exagone inscrit, & celui d'un Exagone circonscrit à deux cercles différens (fig. 117.).

RESOLUTION.

Avec la ligne F E & des points F, E, décrivez deux arcs qui se coupent au point C. De ce point abbaissez une perpendiculairs C O sur la ligne F E. Si du même point C avec une ouverture de compas = F E, vous décrivez un cercle; qu'ensuite avec une ouverture de compas = C O vous en décrivez un autre; la ligne F E, portée six fois sur le grand cercle, donnera un Exagone qui lui sera inscrit en même temps qu'il sera circonscrit au petit; ce qui est assez clair (n°. 123. 124. 125.).

PROBLEME XLIX.

127. Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle donné (fig. 118.).

RESOLUTION.

Vous ferez cette opération comme si vous aviez dessein d'inscrire un Exagone, & vous tirerez trois cordes, dont chacune soutienne un arc double de l'arc de l'Exagone; elles formeront un triangle équilatéral inscrit.

La circonscription de ce Poligone au cercle se fera suivant la méthode que nous avons proposée aux nombres 123, 124.

Nous venons de supposer que le cercle, auquel nous avons inscrit & circonscrit le triangle, fût donné; mais on a quelquefois besoin d'inscrire ou de circonscrire un cercle à un triangle donné, de quelque nature qu'il puisse être.

PROBLEME L.

128. On propose d'inscrire un cercle dans le triangle ABG; c'est-à-dire, de décrire un cercle dont les trois côtés soient des tangentes (fig. 119.).

RESOLUTION.

Divisez les angles A, B en deux parties égales par les lignes AS, BX. Du point C, où ces deux lignes se coupent, abbaissez sur l'un des trois côtés du triangle une perpendiculaire CD. Avec cette perpendiculaire décrivez un cercle du point C. Je dis que les trois côtés du triangle seront des tangentes à ce cercle.

DEMONSTRATION.

Du point C abbaissez les perpendiculaires CO, CM sur les deux nutres côtés. Si les trois perpendiculaires CD, CO, CM sont égales; il est certain que les trois côtés sont des tangentes. Considérez d'abord les deux triangles CMA, CDA qui ont chacun un angle droit; de plus l'angle *a* du premier = l'angle *b* du second (construction); ainsi le troisiéme angle MCA d'une part est égal au troisiéme angle ACD d'une autre part : le côté CA est commun à ces deux triangles; par conséquent l'un est déterminé précisément de la même maniére que l'autre; ainsi les côtés de l'un sont égaux aux côtés de l'autre, chacun à chacun, c'est-à-dire, que les côtés opposés à des angles égaux sont égaux : par conséquent la perpendiculaire MC, opposée à l'angle *a*, est égale à la perpendiculaire CD opposée à l'angle $b = a$. En comparant de la même maniére le

triangle C D B avec le triangle C B O, on trouvera que C D = C O ; d'où il suit que les trois perpendiculaires C M, C D, C O sont égales. C. Q. F. D.

Remarquez qu'en divisant l'angle G en deux parties égales, & l'un des deux autres angles, on trouveroit le même point C ; ainsi on divisera deux angles du triangle proposé indifféremment ; d'où il résulte que les trois lignes, qui divisent en deux parties égales les trois angles d'un triangle, se rencontrent toutes au même point.

129. On circonscrit un cercle à un triangle de la méme maniére que l'on fait passer une circonférence par trois points donnés, qui ne sont pas sur une même ligne droite (n°. 111.). On employe ce même moyen pour faire renaître une circonférence, dont il ne reste qu'une portion ; ce qui peut être utile dans la pratique. On sçait que le cadran d'une horloge ou d'une montre est composé de plusieurs circonférences *concentriques*, c'est-à-dire, qui ont le même centre. Il arrive quelquefois qu'une grande partie de ces quadrans se détruit, & que l'on a intérêt de les reproduire tels qu'ils étoient d'abord. La Géométrie nous fera retrouver cette circonférence, ainsi qu'on va le voir.

PROBLEME LI.

130. Trouver le reste d'une circonférence dont on a la portion A B C (fig. 120.).

RESOLUTION.

Marquez sur cette portion trois points A, B, C à liberté. Coupez l'arc A B en deux parties égales par la ligne O S (n°. 36.) ; faites aussi que la ligne

PM coupe l'arc BC en deux parties égales. Le point I d'interſection eſt le centre de la circonférence à laquelle l'arc ABC appartient. Ce qui ſe démontre ainſi qu'on l'a éxécuté au n°. 111. prob. 39.

PROBLEME LII.

131. Inſcrire dans un cercle un Dodécagone ou un Poligone régulier de douze côtés (fig. 121.).

RESOLUTION.

Prenez un arc de 60 degrés, en portant le rayon CD depuis A juſqu'en B (n°. 119.) coupez l'arc AB en deux parties égales au point D, & tirez la corde AD. Portez-là douze fois ſur la circonférence; elle la diviſera éxactement en douze parties égales. Continuant à tirer des cordes à tous les points de diviſion, on aura le Dodécagone inſcrit.

DEMONSTRATION.

Puiſque l'arc AB eſt ſix fois dans la circonférence, ſa moitié AD y ſera douze fois. C. Q. F. D.

132. Si l'on continuoit de couper en deux parties égales l'arc du Dodécagone, on auroit un Poligone régulier de 24 côtés; & diviſant toujours en deux celui qui viendroit, on auroit à l'infini des Poligones réguliers, dont le ſuivant auroit toujours un nombre de côtés double de celui qui le précéderoit Immédiatement. A commencer par le triangle équilatéral, on verroit une ſuite de Poligones réguliers, dont le premier ſeroit de trois côtés égaux, le ſecond de ſix, le troiſiéme de douze, le quatriéme de vingt-quatre, le cinquiéme de quarante-huit, &c. ce qui n'a pas beſoin d'autre explication.

Pour circonfcrire des Poligones d'un pareil nombre de côtés ; lorfque l'on aura marqué fur la circonférence du cercle les points du Poligone infcriptible, on tirera des tangentes par tous ces points. Elles donneront un Poligone circonfcrit tel qu'on le demande.

PROBLEME LIII.

133. Sur la ligne donnée A B conftruire un Dodécagone.

RESOLUTION.

Je vais donner une méthode de conftruire un Poligone quelconque fur une ligne donnée, pourvu que l'on fçache infcrire ce même Poligone dans un cercle.

Puifque vous voulez conftruire une Dodécagone fur la ligne A B, A ——————————— B infcrivez d'abord ce Poligone dans un cercle quelconque (n°. 131.) vous aurez l'angle de ce Poligone (n°. 121.). Aux extrémités A, B de la ligne donnée faites des angles égaux chacun à celui du Poligone infcrit. Portez la ligne AB fur les côtés de ces angles, afin qu'elle les détermine. Aux extrémités de ces côtés nouvellement déterminés continüez à faire des angles égaux à celui du Poligone infcrit, donnez toujours à ces angles des côtés égaux à la ligne A B, & continuez ces opérations jufqu'à ce que la figure foit entiérement fermée, vous aurez un Dodécagone, dont tous les angles font égaux, & tous les côtés égaux à la ligne A B.

On peut abréger cette opération en coupant en deux parties égales les angles faits aux extrémités de la ligne AB. Les lignes qui opéreront cette di-

vision iront se rencontrer en un point, duquel décrivant une circonférence par les extrémités A, B de la ligne donnée, cette circonférence sera divisible éxactement en douze parties égales par la ligne AB. D'où il résultera un Dodécagone construit sur la ligne AB, ainsi qu'on demandoit. Les Maîtres feront éxécuter tout ce détail aux Commençans. En se rendant un peu attentifs à la construction, la démonstration sera fort sensible.

PROBLEME LIV.

134. Inscrire un quarré dans un cercle (fig. 122.).

RESOLUTION.

Tirez les deux diamétres AB, CD qui se coupent à angles droits au centre S. Ces diamétres détermineront sur la circonférence les quatre points A, C, B, D, par lesquels on n'a qu'à tirer des cordes, qui donneront le quarrré ACBD inscrit.

DEMONSTRATION.

Il faut prouver deux choses. 1°. Que les quatre angles sont droits. 2°. Que les quatre côtés AC, CB, BD, DA sont égaux.

Il est aisé de remarquer que tous les angles de cette figure sont des angles droits; puisqu'ils ont tous leur sommet à la circonférence & qu'ils s'appuyent sur le diamétre; & qu'ainsi ils sont mesurés par la moitié de la demi-circonférence qui passe entre leurs côtés (n°. 104.), c'est-à-dire, qu'ils ont chacun pour mesure le quart de la circonférence, valeur de l'angle droit.

2°. Que tous les côtés de cette figure soient

égaux, c'est une chose visible par la construction ; car C S, étant perpendiculaire sur le milieu de A B, n'incline d'aucun côté ; ainsi C A = C B. B S est aussi perpendiculaire sur le milieu de C D. Donc C B = B D, & par la même raison B D = D A. Par conséquent les quatre côtés de cette figure sont égaux. C'est donc un quarré ; ayant d'ailleurs tous ses angles droits.

PROBLEME LV.

135. Inscrire un Octogone dans un cercle (fig. 123.).

RESOLUTION.

Commencez par déterminer les points A, C, B, D du quarré inscriptible. Ces points diviseront la circonférence en quatre parties égales. Coupez chaque partie en deux, & tirez des cordes à tous les points de division, elles produiront l'Octogone, puisque 2 fois 4 = 8.

Il suffira de couper en deux parties égales une des quatre parties déterminées par les points du quarré inscriptible, & d'en porter la moitié sur les trois autres.

En continuant cette opération, c'est-à-dire, en divisant toujours par 2 l'arc qui viendroit ; on auroit à l'infini une suite de Poligones réguliers, dont le premier vers le centre du cercle seroit de quatre côtés. Le second de 8. Le troisiéme de 16. Le quatriéme de 32, &c. & ainsi de suite à l'infini, en doublant toujours.

136. On circonscrira un quarré ou un Octogone autour d'un cercle, en marquant sur la circonférence du cercle les points du quarré ou de

l'Octogone inscriptible. Par ces points on ménera des tangentes au cercle ; elles formeront le quarré ou l'Octogone circonscrit (n°. 123. 124.).

PROBLEME LVI.

137. Aulieu d'inscrire ou de circonscrire un quarré à un cercle donné, supposons que l'on ait un quarré ABCD où il s'agisse d'inscrire un cercle (fig. 124.).

RESOLUTION.

Coupez les quatre côtés du quarré en deux parties égales. Tirez les lignes ON, MS aux points de division. Leur point d'intersection P est le centre du cercle qui touchera les quatre côtés, en lui donnant pour rayon PO, ou PM, &c.

DEMONSTRATION.

Elle est assez claire (*a*).

PROBLEME LVII.

138. Circonscrire un cercle autour d'un quarré donné ABCD (fig. 125.).

(*a*) Ce n'est pas la peine de faire les frais d'une démonstration réguliére, quand les constructions sont aussi sensibles que celle-ci. Il arrive souvent qu'après l'étalage d'un long discours les Commençans cessent de voir ce qui leur paroissoit d'abord tout évident. La démonstration n'a été établie que pour suppléer au défaut des sens ou pour corriger leur abus. S'il suffit d'ouvrir les yeux pour appercevoir qu'une chose est ; il ne faut pas se tourmenter l'esprit à en chercher les raisons ; cela conduiroit beaucoup plus au dégoût qu'à l'évidence. Ainsi, par rapport aux constructions bien simples, il y a de l'avantage à laisser agir le témoignage des sens ; il est plus expéditif, & va plus vîte que celui de la réflexion, & par-là il est plus conforme au caractére de la jeunesse.

RESOLUTION.

RESOLUTION.

Une ligne tirée d'un angle à un autre angle opposé comme B D s'appelle *Diagonale*. Tracez donc les Diagonales B D, A C. Leur point O d'intersection sera le centre du cercle que l'on pourra circonscrire au quarré, en donnant à ce cercle la ligne O G pour rayon.

DEMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le point O est également éloigné des quatre points A, B, C, D.

Remarquez que le triangle A B C est un triangle isoscéle rectangle; l'angle en B est droit (const.) ansi l'angle B A O = 45^d aussi-bien que l'angle B C O. Le triangle B A D est aussi un triangle isoscéle rectangle en A (construction); par conséquent l'angle A B O = 45^d; ainsi l'angle A B O = l'angle B A O, que nous avons remarqué être de 45^d; donc O B = O A (n°. 80.). Vous prouverez de même que O B = O C; & que O C = O D, qu'ainsi le point O est également éloigné des quatre points A, B, C, D. C. Q. F. D.

Mais ces deux derniers problêmes supposent que l'on sçache construire un quarré sur une ligne donnée.

PROBLEME LVIII.

139. Sur la ligne A B construire un quarré (fig. 126.).

RESOLUTION.

Aux extrémités A, B de cette ligne élevez les deux

perpendiculrires A D , B C égales à la ligne A B donnée, & tirez C D, vous aurez le quarré A B C D tel qu'on le demandoit.

DEMONSTRATION.

Elle eſt claire par la conſtruction.

On pourroit ſimplifier cette conſtruction en n'élevant que la perpendiculaire A D = A B. Enſuite du point D avec le rayon A B décrire un arc, & du point B en décrire un autre qui coupe le premier en C. Auquel point tirant les lignes D C, B C, elles acheveront le quarré A B C D.

Autre manière de conſtruire un quarré ſur la ligne A B ſans l'opération des perpendiculaires (fig. 127.).

140. Du point A avec la ligne A B déctivez l'arc indéfini B O D P S, & du point B avec la même ligne décrivez un autre arc indéfini A O C X qui coupe le premier au point O. Portez A B de O en P, & tirez P B, elle coupera A O en deux parties égales au point I. Portez I O de O en C & de O en D; les points C, D détermineront le quarré; tirez donc les côtés A D, D C, C B; ils produiront un quarré conſtruit ſur la ligne A B.

DEMONSTRATION.

Il eſt évident d'abord que D A, A B, B C ſont des lignes égales (conſt.). Si de plus on démontre que les deux lignes D A, C B ſont perpendiculaires ſur les extrémités de A B, il ſera prouvé que D C = A B, par conſéquent que les quatre côtés D A, A B, B C, C D ſont égaux & tous les angles droits.

Prouvons donc que les lignes D A, C B forment des angles droits sur la ligne A B.

Faites que l'arc B O D P S soit une demie circonférence entiére, qui vaut 180^d. Par la construction l'arc B O en vaut 60 (n°. 119.) aussi-bien que l'arc O P, puisque nous avons fait B O = O P; reste donc 60^d pour l'arc P S. Or l'angle P B S est à la circonférence du cercle; il a donc pour mesure la moitié de l'arc P S; c'est donc un angle de 30^d. Par conséquent l'arc A I décrit de son sommet B = 30^d. Mais A O en vaut 60 (n°. 119.). Donc cet arc est coupé en deux parties égales au point I par la ligne P B; & comme l'on a porté I O, c'est-à-dire, 30^d de O en C & en D l'arc A O C = 90^d aussi-bien que l'arc B O D. Mais un arc de 90^d est la mesure d'un angle droit, par conséquent les angles A, B sont des angles droits. C. Q. F. D. (*a*).

PROBLEME LIX.

141. Inscrire dans un cercle un Pentagone; c'est-à-dire, une figure réguliére de cinq côtés (fig. 128.).

RESOLUTION.

Sur le diamétre A B élevez le rayon perpendi-

(*a*) Quand on trouve des constructions un peu longues, comme celle-ci, il est à propos de donner la démonstration à mesure que l'on opére. L'esprit a moins de peine à se rappeller le détail de l'opération: de plus, à chaque ligne que l'on tire, on voit ce qui en résulte; ce qui oblige nécessairement à se rendre attentif. observant toujours de ne rien démontrer aux Commençans, à moins qu'ils ne construisent eux-mêmes les figures qui servent à la démonstration: cette conduite est fort propre a les mettre bien au fait de l'état de la question, à leur faire connoître toutes les suppositions ou les données, dont il faut déduire la démonstration, qui doit toujours être une conséquence nécessaire de la construction.

culaire C S. Portez ce rayon de B en O & en D, & tirez O D, qui coupe le diamétre au poinr X. Ouvrez le compas de X en S. Portez cette même ouverture de X en R ſur le diamétre. La diſtance R S eſt le côté du Pentagone régulier inſcriptible au cercle propoſé; & la ligne R C eſt le côté du Décagone régulier inſcriptible au même cercle; enſorte que l'opération donne plus que l'on ne demandoit. Ce qu'il ne nous eſt pas poſſible de démontrer ici pour les raiſons que l'on peut lire à la remarque (*a*).

PROBLEME LX.

142. *Circonſcrire un cercle au Pentagone ABCDE* (fig. 129.).

RESOLUTION.

Coupez en deux parties égales les deux angles C D E, D E A par les lignes D O, E S. Le point I, où elles ſe rencontrent, eſt le centre du cercle, que l'on peut circonſcrire au Pentagone, en lui donnant pour rayon I E ou I D.

(*a*) Notre deſſein étoit d'abord de ne point faire mention de la maniére d'inſcrire un Pentagone ou un Décagone, a cauſe qu'il ne nous eſt pas poſſible d'en demontrer la conſtruction, ſans le ſecours des lignes proportionnelles, dont nous n'avons voulu faire aucun uſage dans ce premier tome des Inſtitutions; quoique nous y ayons démontré toute la Trigonométrie, la meſure des terreins ou l'Arpentage, le partage ou la diviſion des champs, pluſieurs problêmes d'optique & de fortification. Mais tandis que nous étions à l'inſcription des Poligones, nous avons crû qu'il n'étoit pas hors de propos de faire connoitre tous ceux que l'on ſçavoit inſcrire. Dans le ſecond tome, deſtiné à l'adoleſcence, nous ſuppléerons la ſeule démonſtration qui nous marque ici, ſans nuire en rien à l'éxécution du projet que nous avons fermé d'exercer la raiſon des enfans, en les appliquant à des objets materiels, auxquels ils s'arrêtent naturellement.

DEMONSTRATION.

Il faut prouver que le point I eſt également éloigné des cinq points A, B, C, D, E, ou que les cinq lignes I E, I D, I C, I B, I A ſont égales.

Les angles d'un Poligone régulier étant égaux, leurs moitiés ſeront égales. Ainſi l'angle I E D = l'angle I D E. Par conſéquent I D = I E. En diviſant auſſi en deux parties égales l'angle D C B, l'angle I D C = l'angle I C D. Donc I D = I C. Continuant toujours la même opération & le même raiſonnement, vous trouverez I C = I B = I A. Par conſéquent les cinq lignes, qui partent du point I aux angles du Poligone, étant égales, le cercle décrit avec l'une d'elles du centre I ſera circonſcrit au Pentagone. C. Q. F. D.

PROBLEME LXI.

143. Inſcrire un cercle dans un Pentagone donné, ABCDE; c'eſt-à-dire, trouver un cercle dont tous les côtés du Pentagone propoſé ſoient des tangentes (fig. 130.).

RESOLUTION.

Coupez, comme ci-devant, en deux parties égales les deux angles A, E de ce Pentagone par les lignes E I, A I, dont le point de rencontre I eſt le centre d'un cercle, que l'on peut circonſcrire au Pentagone (n°. 142.). De ce point I abbaiſſez une perpendiculaire I S ſur l'un des côtés E A. Avec cette perpendiculaire du point I décrivez un cercle, il ſera inſcrit au Pentagone, ou ce qui eſt la même choſe, tous les côtés du Pentagone ſeront tangentes de ce cercle.

DEMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le point I est également éloigné des cinq côtés de ce Poligone.

Puisque I est le centre d'un Poligone circonscriptible (conft.) IA = IE = ID, &c. (n°. 142.) par conséquent le triangle isoscéle AIE est déterminé précisément de la même maniére que le triangle isoscéle IED; la distance IN du point I au côté ED est donc égale à IS qui marque la distance du point I au côté AE. Ce raisonnement s'applique à tous les autres côtés. Ainsi le point I est à égale distance des cinq côtés de ce Poligone. Par conséquent le cercle décrit du point I avec une de ces perpendiculaires touchera tous ces côtés, qui deviendront alors des perpendiculaires au rayon du cercle; mais une perpendiculaire au rayon du cercle est une tangente. Par conséquent tous les côtés du Pentagone touchent le cercle; il est donc inscrit ainsi qu'on le demandoit.

On pourroit encore démontrer d'une autre maniére que toutes les perpendiculaires abbaissées du point I sont toutes égales à la perpendiculaire IS.

Après avoir tiré IS, abbaissez IN perpendiculairement sur le côté ED, & considérez les deux triangles rectangles ISE, INE qui ont le côté commun EI, & les angles sur ce côté égaux, chacun à chacun; puisque (conft.) l'angle SEI = NEI. L'angle N étant droit comme l'angle S, il s'ensuit que le troisiéme angle NIE = le troisiéme angle SIE (n°. 78.). Ainsi la construction de ces deux triangles étant précisément la même, les côtés opposés à des angles égaux sont égaux. Donc IN = IS & ainsi de suite, en abbaissant des perpendiculaires sur les autres côtés.

Cette maniére d'inſcrire un cercle dans un Pentagone peut s'appliquer à tous les Poligones quelconques : c'eſt pourquoi il ne ſera plus queſtion d'inſcription de cercle.

PROBLEME LXII.

144. Conſtruire un Pentagone ſur la ligne donnée A B (fig. 131.).

RESOLUTION.

Nous avons propoſé une méthode générale de réſoudre ce problême n°. 133. Il eſt à propos d'en donner ici l'application.

Inſcrivez dans un cercle quelconque un Pentagone O B C D E (n°. 141.); afin d'avoir l'angle E O B de ce Poligone. Au point A de la ligne A B donnée faites l'angle B A P égal à l'angle E O B du Pentagone inſcrit. Faites le même angle au point B. Que A P & B S ſoient égales chacune à la ligne A B. Aux extrémités P, S de ces lignes formez encore des angles égaux chacun à l'angle E O B. Le point d'interſection M des côtés P M, S M de ces angles déterminera le Pentagone A B S M P, que l'on propoſoit de conſtruire ſur la ligne A B.

DEMONSTRATION.

Le Pentagone A B S M P eſt déterminé ſur la ligne A B d'une maniére ſemblable à celle dont le Pentagone O B C D E eſt conſtruit ſur la ligne O B, puiſque ce dernier eſt le modéle du premier; mais (conſtruction) le Pentagone O B C D E eſt un Poligone régulier ; par conſéquent le Pentagone

ABSMP est aussi un Poligone régulier (a). C. Q. F. D.

En coupant en deux parties égales l'arc du Pentagone on aura, avec une très-grande facilité, le Décagone inscrit ou circonscrit. La construction de ce Poligone sur une ligne donnée se fera aussi, en suivant la méthode que nous venons d'éxécuter par rapport au Pentagone.

PROBLEME LXIII.

145. Inscrire dans un cercle un Pentadécagone, c'est-à-dire, une figure réguliére de 15 côtés.

Il faut observer que le problême se réduit à trouver un arc qui soit la quinziéme partie de la circonférence. Or en divisant 360, valeur de la circonférence, par 15, on trouve 24. L'arc que l'on demande doit donc être de 24^d (fig. 132.).

RESOLUTION.

Inscrivez dans ce cercle le Pentagone régulier & le triangle équilatéral qui ayent chacun un angle au même point A. L'arc CD sera de 24 degrés.

DEMONSTRATION.

Le côté AC du triangle équilatéral soutient l'arc ABC de 120^d, troisiéme partie de la circonférence, & le côté AB du Pentagone retranche un arc de 72^d, cinquiéme partie de la circonférence. Otez

(a) Cette façon de démontrer nous paroît fort élégante; mais elle ne convient pas peut-être à toute sorte d'esprits : s'il nous revient qu'elle n'est pas assez rigoureuse, on se doute bien que nous sçaurons en produire d'une autre espéce. En attendant nous avertirons que les Commençans s'en accommodent fort volontiers, parce qu'elle ne contraint point trop leur attention.

donc l'arc AB de l'arc ABC, c'est-à-dire, retranchez 72^d de 120^d, il restera BC $=$ 48^d. Mais BCD est encore un arc de 72; retranchez donc BC de BCD ou 48 de 72, vous aurez CD $=$ 24^d, c'est-à-dire, la quinziéme partie de la circonférence.

C'est ainsi que tous les Commentateurs d'Euclide ont résolu ce problême. Nous allons en produire deux autres résolutions beaucoup plus simples.

Seconde maniére d'inscrire dans un cercle un Pentagone (fig. 133.).

Du même point A portez sur la circonférence du cercle le côté AB de l'Exagone & le côté AC du Pentagone inscriptibles à ce cercle. Le double de l'arc BC sera l'arc du Pentadécagone.

DEMONSTRATION.

Il faut prouver que le double de l'arc BC $=$ 24^d.

L'arc ABC du Pentagone $=$ 72^d, & l'arc AB de l'Exagone en vaut 60. Otant 60 de 72, il reste 12 valeur de l'arc BC, qu'il faut par conséquent doubler pour avoir l'arc de 24^d. C. Q. F. D.

Troisiéme maniére d'avoir un Pentadécagone inscrit. (fig. 133.).

Du même point A pris à liberté sur la circonférence du cercle portez le côté AS de l'Exagone & le côté AO du Décagone; l'arc OS sera de 24^d.

DEMONSTRATION.

L'arc AOS de l'Exagone $=$ 60^d, & l'arc AO du Décagone en vaut 36, dixiéme partie de la cir-

conférence. Otez 36 de 60, il reste 24 pour l'arc OS. C. Q. F. D.

Cette troisiéme maniére fournit une construction & une démonstration beaucoup plus simple que les précédentes.

Voilà tous les Poligones réguliers, que l'on a pû jusqu'à présent inscrire ou circonscrire au cercle avec la régle & le compas, c'est-à-dire, en n'employant que la ligne droite & la circonférence du cercle (*a*). Ainsi l'on ne sçauroit, par le seul moyen de la Géométrie élémentaire, diviser la circonférence en ses 360^d; car, pour rendre cette division complette, il faudroit pouvoir diviser en trois par-

(*a*) Les Anciens appelloient Géométrique toute résolution qui n'avoit besoin que du cercle & de la ligne droite. Ainsi, quand on employoit des lignes d'une autre espéce, pour résoudre, par exemple, le problême de *la trisection de l'angle*, où il s'agit de diviser un angle quelconque en trois parties égales, ils ne vouloient pas que cette résolution fût Géométrique : apparemment parce qu'ils jugeoient qu'une ligne courbe, décrite par un autre instrument que le compas, étoit peu éxacte.

Tout le monde est tenté de croire que c'est la chose du monde la plus aisée que de couper en trois parties égales un angle quelconque, & cependant depuis plus de deux mille ans on n'a pû en venir à bout qu'en tâtonnant, si l'on excepte le moyen qu'a fourni l'application de l'Algébre à la Géométrie; moyen, quoique démontré, plus long & plus défectueux dans la pratique que le tâtonnement. N'allez pourtant pas conclure de-là, comme certains Philosophes, que *la perfection de notre esprit auroit moins de lieu, & se feroit moins connoître, si nos organes étoient plus parfaits*, c'est-à-dire, si nous appercevions, par éxemple, d'un coup d'œil la trisection de l'angle, *parce que, disent-ils, l'esprit ne cherche & ne trouve des ressources que pour corriger l'imperfection de nos organes.*

Notre esprit se seroit élevé à des connoissances proportionnées à sa curiosité, à ses besoins. Dans l'état d'organes plus parfaits, il auroit monté plus haut, & n'auroit jamais compté ses degrés de perfection que du point dont il seroit parti. Tout n'est que comparaison. Nous donnons le nom de parfait à ce qui nous paroît meilleur; tandis que des êtres d'un autre ordre se trouveroient dégradés avec de pareils attributs. Mais ne parlons jamais aux jeunes gens de ce rafinement d'idées. Calculons ce que la nature nous offre suivant le systême qu'elle a établi. Vouloir pénétrer ce qui arriveroit dans une autre supposition, c'est oublier que nous aurions sans doute alors des idées des choses totalement différentes de celles qui nous occupent.

ties égales l'angle de trois degrés, comme nous allons le faire voir dans le problême suivant.

PROBLEME LXIV.

146. Diviser la circonférence d'un cercle en ses 360 degrés ou, ce qui est la même chose, diviser la demi-circonférence en 180^d. (fig. 134.).

RESOLUTION.

Elevez perpendiculairement le rayon OA. Du point A portez sur la circonférence le côté AD de l'Exagone & le côté AE du Pentagone inscriptibles au même cercle. Coupez en deux parties égales l'arc DC au point H. Je dis que l'arc EH = 3 degrés; il n'y aura donc qu'à le couper méchaniquement (a) en trois parties égales, & la circonférence se trouvera divisée en ses 360 degrés.

DEMONSTRATION.

Prouvons que l'arc EH = 3^d. Par la construction, l'arc ADE du Pentagone = 72^d, & l'arc AD = 60. Donc l'arc DE = 12. Mais l'arc ADC = 90^d, donc DC = 30; puisque AD en vaut 60. Or on a coupé CD en deux parties égales au point H; ainsi DEH = 15^d. On a déja vu que DE = 12 : donc EH = 3.

(a) On dit que l'on éxécute une opération *méchaniquement*, lorsque l'on y parvient sans aucune régle démontrée, qui détermine à la rigueur ce que l'on cherche. Telle est l'opération de la trisection de l'angle avec le seul moyen du cercle & de la ligne droite : il y a pourtant quelques angles que l'on divise géométriquement en trois parties égales, tel est l'angle droit. On divise aussi éxactement en trois parties égales l'angle de 9 degrés aussi-bien que les angles de 18, de 27, de 36, de 54, de 72, &c. comme il est évident à ceux qui ont bien compris la résolution du problême 63.

Indépendamment de l'utilité dont les Poligones réguliers sont pour la fortification, leur simétrie touche agréablement nos organes : ainsi les Arts de goût font usage de ces Poligones : on les voit employés à carreler presque tous les appartemens. Mais il n'y a qu'un certain nombre de ces Poligones, dont l'usage soit possible ; & la Géométrie sçait déterminer ce nombre.

PROBLEME LXV.

147. Déterminer les figures régulières avec lesquelles on peut carreler un appartement.

RESOLUTION.

Il n'y a point d'autres figures régulières, qui puissent remplir ce dessein, que les triangles équilatéraux, les quarrés & les Exagones.

DEMONSTRATION.

Avant que d'en faire le dénombrement, on observera que les angles des Poligones, destinés à cet usage, doivent s'ajuster de manière qu'ils ne laissent aucun espace vide. Mais on sçait que tous les angles, que l'on peut former autour du même point sur un plan, ne valent que quatre angles droits. Ainsi les figures régulières, dont les angles réunis au même point donnent précisément 360^d, sans laisser entre eux aucun intervale, sont les seules qui puissent satisfaire au problême proposé. Il faut donc rechercher celles qui ont cette propriété.

Nous avons vû que l'angle du triangle équilatéral $= 60^d$; par conséquent six de ces angles, réunis sur un plan autour d'un même point, ne laiss-

feront aucun vide ; car 6 fois 60 = 360. La figure 135 est composée de triangles équilatéraux.

L'angle du quarré = 90^d. Quatre de ces angles produiront donc l'effet demandé. Puisque 4 fois 90 = 360. Voyez les quatre quarrés disposés autour du point O (fig. 136.).

Le Pentagone ne sçauroit être mis au nombre des figures, dont nous avons ici besoin. Puisque l'angle du Pentagone (n°. 121.) = 108^d. Or 3 fois 108 = 324 < 360, & 4 fois 108 = 432 > > 360.

L'angle de l'Exagone = 120^d. Par conséquent trois de ces angles = 360^d. Ainsi ce Poligone est une des figures réguliéres, dont nous pouvons faire usage, comme on le voit en la figure 137.

Que l'on prenne l'angle de l'Eptagone = 128$\frac{4}{7}$. Ce nombre pris 3 fois donnera plus de 360. Ainsi l'Eptagone ne sçauroit nous convenir ; à plus forte raison l'Octogone doit être rejetté ; car son angle est plus grand que celui de l'Eptagone. Il en est ainsi de tous les Poligones au-dessus de l'Exagone.

On ne peut donc carreler les appartemens avec des figures réguliéres, différentes du triangle équilatéral, du quarré, de l'Exagone. C. Q. F. D.

Pour confirmer cette vérité, on fera attention qu'il faut au moins trois angles plans, pour remplir l'espace qui régne autour d'un point. Deux angles n'y suffiroient pas ; parce que deux angles, si obtus qu'ils puissent être, ne valent jamais 360^d, valeur néanmoins nécessaire, afin que des angles disposés autour d'un point sur un plan ne laissent aucun vide entre eux. Or comme la réunion des trois angles, qui appartiennent à des Poligones au-dessus de l'Exagone, donne toujours plus que 360 degrés, il s'ensuit évidemment qu'il est inutile de pous-

ſer les recherches au-delà de l'Exagone (*a*).

Les Poligones réguliers contribuent encore à l'embelliſſement des jardins. Le contour des baſſins, que l'on y creuſe pour contenir & recevoir des eaux plattes & jailliſſantes, eſt ordinairement un Poligone régulier.

PROBLEME LXVI.

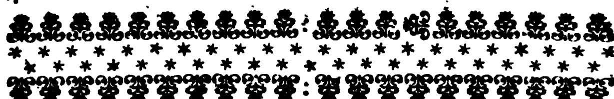
148. **Moyen très-ſimple de tracer un Poligone régulier ſur le terrein (fig. 138.).**

Décrivez d'abord ſur un grand carton, ſur un ais ou ſur une planche bien platte & bien unie, le Poligone que vous avez deſſein de tracer : ſuppoſons que ce ſoit un Octogone (n°. 135.), on peut lui donner un pied de rayon & même plus (fig. 138.), ceux qui ont un plus grand rayon ſont les plus avantageux. Vous placerez le centre de ce Poligone au point que l'on aura déterminé, pour avoir cette figure tracée ſur le terrein, & l'on y arrêtera le carton par le moyen d'un piquet planté à ſon centre. On attachera à ce piquet l'extrémité d'une corde, d'une longueur convenue, garnie d'un anneau ; afin que la corde tendue puiſſe tourner tout autour du piquet, ſans s'y entortiller. Après cela vous tendrez la corde ſucceſſivement ſur les rayons CA, CB, CD, &c. A chaque coup de cordeau vous planterez un piquet S à ſon extrémité, & les

(*a*) On fera donc voir aux Commençans ſur le pavé même qu'il n'y a que trois ſortes de figures régulieres qui ſatisfont à ce problême. Et afin que le témoignage des yeux appuye celui de la raiſon, on découpera d'autres Poligones conſtruits ſur du carton, ſur du papier, &c. on eſſayera de réunir pluſieurs de leurs angles en un ſeul point. L'expérience apprendra que deux de ces angles laiſſeront quelque intervale entre eux, ou que l'un s'étendra en partie ſur l'autre ; ce qui produira de l'excès d'une part & du défaut de l'autre.

huit piquets S,S,S, &c. détermineront les huit côtés de l'Octogone, que l'on se proposoit de tracer sur le terrein. Il n'y aura donc plus qu'à tracer un sillon droit de S en S, en S, &c. ce que la résolution des problêmes précédens a rendu assez clair. Les cordes ou les cordeaux, dont on se sert dans ces opérations, ont toujours quelque fléxibilité; quoiqu'elles paroissent très-bien tendues sur un rayon, elles peuvent néanmoins s'en écarter insensiblement sur une petite étendue, mais très-sensiblement sur une distance considérable. Afin donc d'éviter cet inconvénient, on allignera deux piquets opposés sur le piquet planté au centre C; alors on aura l'Octogone tracé avec toute l'éxactitude que l'on peut souhaiter.

Fin du premier Tome.



TABLE

DES CHAPITRES ET DES PRINCIPALES Matiéres contenues dans le premier Tome.

DE L'ARITHMETIQUE.

Régle

DE L'ALGEBRE.

INSTITUTIONS DE GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monseigneur le Chancellier, les *Institutions de Géométrie, ou l'Art d'enseigner la Géométrie sur le papier & sur le terrein.* Fait à Paris ce 24 Août 1745.

MONTCARVILLE.



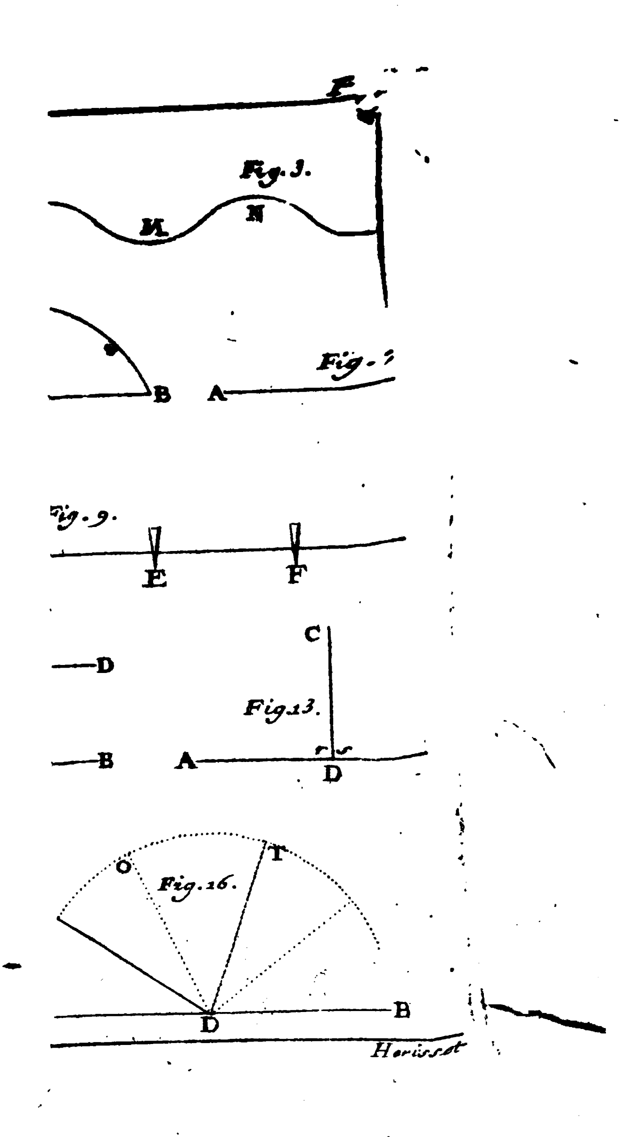
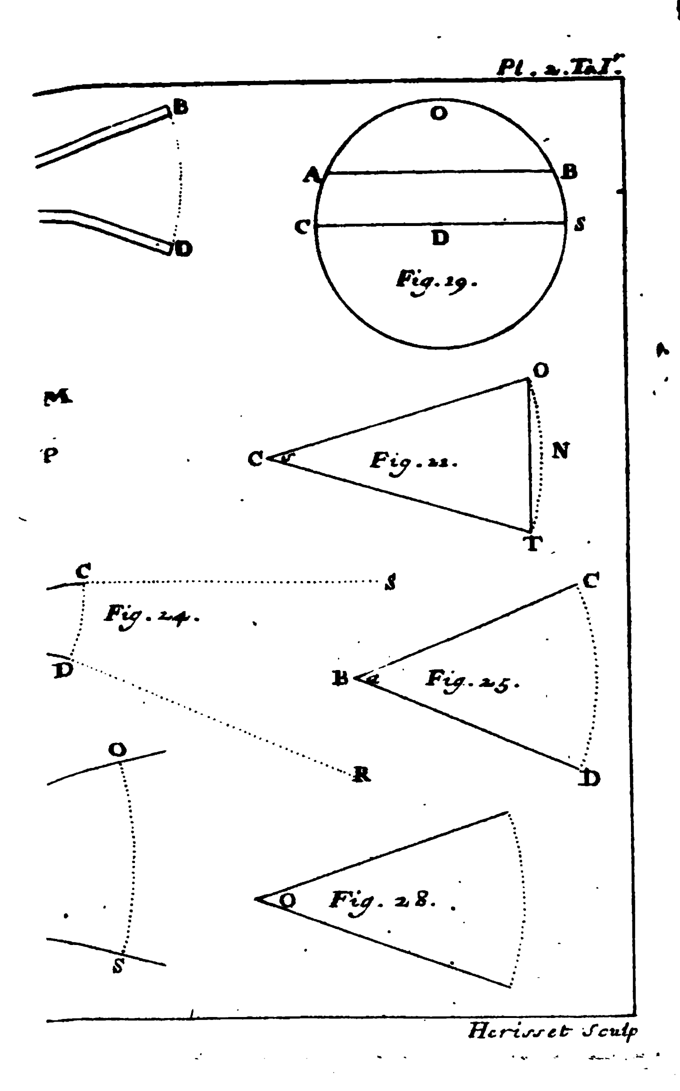
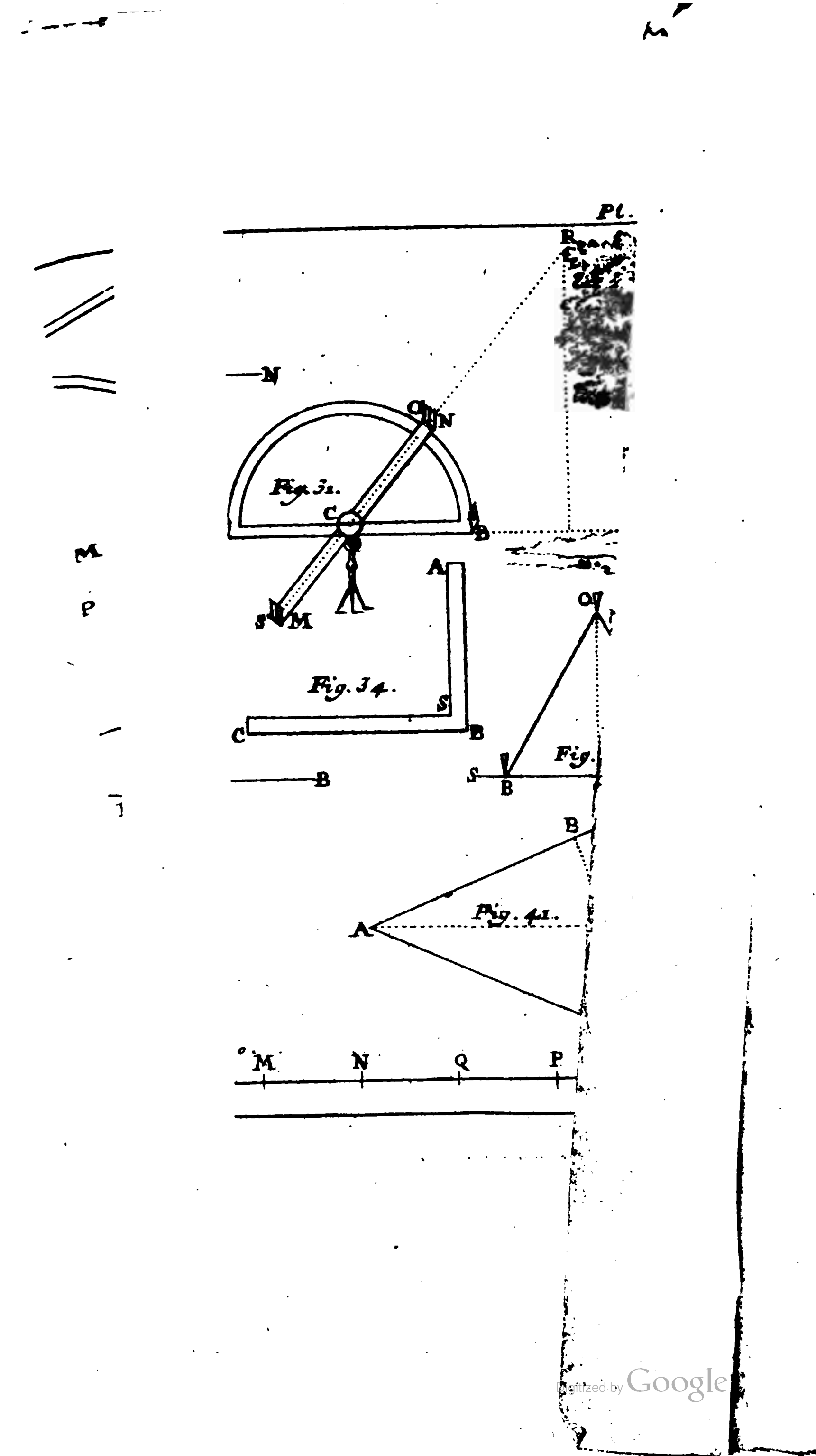


Fig. 3.
M
N
B
A
Fig. 9.
E
F
C
D
Fig. 13.
B
A
D
O
T
Fig. 16.
D
B
Herisset

Pl. 2. Tab. I.



Herisset Sculp



Pl.
N
O
N
Fig. 31.
C
B
S
M
A
Fig. 34.
S
C
B
B
O
Fig.
S
B
B
Fig. 41.
A
M
N
Q
P
M
P

